NOTAÇÕES

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$		i	: unidade imaginária; $i^2 = -1$
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros		$\lvert z \rvert$	: módulo do número $z \in \mathbb{C}$
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais		$\overline{z}$	: conjugado do número $z \in \mathbb{C}$
$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos		$\operatorname{Re} z$	: parte real de $z \in \mathbb{C}$
$\emptyset$: conjunto vazio		$\operatorname{Im} z$	: parte imaginária de $z \in \mathbb{C}$
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$		I	: matriz identidade
$(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$		A^{-1}	: inversa da matriz inversível A
$[a, b) = [a, b[= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$		A^t	: transposta da matriz A
$(a, b] =]a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$		$\det A$	: determinante da matriz A
$A - B = \{x \in A;\ x \notin B\}$		A^C	: complementar de A

$\mathcal{P}(A)$: coleção de todos os subconjuntos de A

$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B

$\overset{\frown}{AB}$: arco de circunferência de extremidades A e B

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos ortogonais.

Questão 1. Considere uma população de igual número de homens e mulheres, em que sejam daltônicos 5% dos homens e $0,25\%$ das mulheres. Indique a probabilidade de que seja mulher uma pessoa daltônica selecionada ao acaso nessa população.

A ( ) $\dfrac{1}{21}$ **B** ( ) $\dfrac{1}{8}$ **C** ( ) $\dfrac{3}{21}$ **D** ( ) $\dfrac{5}{21}$ **E** ( ) $\dfrac{1}{4}$

Questão 2. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tais que $|\alpha| = |\beta| = 1$ e $|\alpha - \beta| = \sqrt{2}$. Então $\alpha^2 + \beta^2$ é igual a

A ( ) -2 **B** ( ) 0 **C** ( ) 1 **D** ( ) 2 **E** ( ) $2i$

Questão 3. Considere o sistema $Ax = b$, em que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Sendo T a soma de todos os valores de k que tornam o sistema impossível e sendo S a soma de todos os valores de k que tornam o sistema possível e indeterminado, então o valor de $T - S$ é

A ( ) -4 **B** ( ) -3 **C** ( ) 0 **D** ( ) 1 **E** ( ) 4

Questão 4. Sejam A e C matrizes $n \times n$ inversíveis tais que $\det(I + C^{-1}A) = 1/3$ e $\det A = 5$. Sabendo-se que $B = 3\left(A^{-1} + C^{-1}\right)^t$, então o determinante de B é igual a

A ( ) 3^n **B** ( ) $2 \cdot \dfrac{3^n}{5^2}$ **C** ( ) $\dfrac{1}{5}$ **D** ( ) $\dfrac{3^{n-1}}{5}$ **E** ( ) $5 \cdot 3^{n-1}$

Questão 5. Um polinômio P é dado pelo produto de 5 polinômios cujos graus formam uma progressão geométrica. Se o polinômio de menor grau tem grau igual a 2 e o grau de P é 62, então o de maior grau tem grau igual a

A ( ) 30 **B** ( ) 32 **C** ( ) 34 **D** ( ) 36 **E** ( ) 38

Questão 6. Um diedro mede 120°. A distância da aresta do diedro ao centro de uma esfera de volume $4\sqrt{3}\,\pi$ cm^3 que tangencia as faces do diedro é, em cm, igual a

A ( ) $3\sqrt{3}$ **B** ( ) $3\sqrt{2}$ **C** ( ) $2\sqrt{3}$ **D** ( ) $2\sqrt{2}$ **E** ( ) 2

Questão 7. Considere o quadrado $ABCD$ com lados de 10 m de comprimento. Seja M um ponto sobre o lado $\overline{AB}$ e N um ponto sobre o lado $\overline{AD}$, eqüidistantes de A. Por M traça-se uma reta r paralela ao lado $\overline{AD}$ e por N uma reta s paralela ao lado $\overline{AB}$, que se interceptam no ponto O. Considere os quadrados $AMON$ e $OPCQ$, onde P é a intersecção de s com o lado $\overline{BC}$ e Q é a intersecção de r com o lado $\overline{DC}$. Sabendo-se que as áreas dos quadrados $AMON, OPCQ$ e $ABCD$ constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica, então a distância entre os pontos A e M é igual, em metros, a

A ( ) $15 + 5\sqrt{5}$ **B** ( ) $10 + 5\sqrt{5}$ **C** ( ) $10 - \sqrt{5}$
D ( ) $15 - 5\sqrt{5}$ **E** ( ) $10 - 3\sqrt{5}$

Questão 8. Considere o polinômio $p(x) = a_5\,x^5 + a_4\,x^4 + a_3\,x^3 + a_2\,x^2 - a_1$, em que uma das raízes é $x = -1$. Sabendo-se que a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 são reais e formam, nesta ordem, uma progressão aritmética com $a_4 = 1/2$, então $p(-2)$ é igual a

A ( ) -25 **B** ( ) -27 **C** ( ) -36 **D** ( ) -39 **E** ( ) -40

Questão 9. Sobre a equação polinomial $2x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 1 = 0$, sabemos que os coeficientes a, b, c são reais, duas de suas raízes são inteiras e distintas e $1/2 - i/2$ também é sua raiz. Então, o máximo de a, b, c é igual a

A ( ) -1 **B** ( ) 1 **C** ( ) 2 **D** ( ) 3 **E** ( ) 4

Questão 10. É dada a equação polinomial

$$(a+c+2)\,x^3+(b+3c+1)\,x^2+(c-a)\,x+(a+b+4)=0$$

com a, b, c reais. Sabendo-se que esta equação é recíproca de primeira espécie e que 1 é uma raiz, então o produto abc é igual a

A ( ) -2 **B** ( ) 4 **C** ( ) 6 **D** ( ) 9 **E** ( ) 12

Questão 11. Sendo $[-\pi/2, \pi/2]$ o contradomínio da função arcoseno e $[0, \pi]$ o contradomínio da função arcocosseno, assinale o valor de

$$\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{3}{5}+\arccos\frac{4}{5}\right).$$

A ( ) $\dfrac{1}{\sqrt{12}}$ **B** ( ) $\dfrac{7}{25}$ **C** ( ) $\dfrac{4}{15}$ **D** ( ) $\dfrac{1}{\sqrt{15}}$ **E** ( ) $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$

Questão 12. Dada a cônica $\lambda : x^2-y^2=1$, qual das retas abaixo é perpendicular à λ no ponto $P=\left(2,\sqrt{3}\right)$?

A ( ) $y=\sqrt{3}(x-1)$ **B** ( ) $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ **C** ( ) $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$

D ( ) $y=\dfrac{-\sqrt{3}}{5}(x-7)$ **E** ( ) $y=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}(x-4)$

Questão 13. O conjunto imagem e o período de $f(x)=2\operatorname{sen}^2(3x)+\operatorname{sen}(6x)-1$ são, respectivamente,

A ( ) $[-3,3]$ e 2π **B** ( ) $[-2,2]$ e $\dfrac{2\pi}{3}$ **C** ( ) $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$ e $\dfrac{\pi}{3}$

D ( ) $[-1,3]$ e $\dfrac{\pi}{3}$ **E** ( ) $[-1,3]$ e $\dfrac{2\pi}{3}$

Questão 14. Para $x \in \mathbb{R}$, o conjunto solução de $|5^{3x}-5^{2x+1}+4\cdot 5^x|=|5^x-1|$ é

A ( ) $\left\{0,\ 2\pm\sqrt{5},\ 2\pm\sqrt{3}\right\}$

B ( ) $\left\{0,\ 1,\ \log_5\left(2+\sqrt{5}\right)\right\}$

C ( ) $\left\{0,\ \dfrac{1}{2}\log_5 2,\ \dfrac{1}{2}\log_5 3,\ \log_5\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

D ( ) $\left\{0,\ \log_5\left(2+\sqrt{5}\right),\ \log_5\left(2+\sqrt{3}\right),\ \log_5\left(2-\sqrt{3}\right)\right\}$

E ( ) A única solução é $x=0$

Questão 15. Um subconjunto D de $\mathbb{R}$ tal que a função $f : D \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |\ln(x^2 - x + 1)|$ é injetora, é dado por

A ( ) $\mathbb{R}$ **B** ( ) $(-\infty, 1]$ **C** ( ) $[0, 1/2]$ **D** ( ) $(0, 1)$ **E** ( ) $[1/2, \infty)$

Questão 16. A soma de todas as soluções distintas da equação

$$\cos 3x + 2\cos 6x + \cos 9x = 0,$$

que estão no intervalo $0 \leq x \leq \pi/2$, é igual a

A ( ) 2π **B** ( ) $\frac{23}{12}\pi$ **C** ( ) $\frac{9}{6}\pi$ **D** ( ) $\frac{7}{6}\pi$ **E** ( ) $\frac{13}{12}\pi$

Questão 17. Considere o conjunto $D = \{n \in \mathbb{N}; 1 \leq n \leq 365\}$ e $H \subset \mathcal{P}(D)$ formado por todos os subconjuntos de D com 2 elementos. Escolhendo ao acaso um elemento $B \in H$, a probabilidade de a soma de seus elementos ser 183 é igual a

A ( ) $\frac{1}{730}$ **B** ( ) $\frac{46}{33\,215}$ **C** ( ) $\frac{1}{365}$ **D** ( ) $\frac{92}{33\,215}$ **E** ( ) $\frac{91}{730}$

Questão 18. Considere o triângulo ABC isósceles em que o ângulo distinto dos demais, $B\hat{A}C$, mede $40°$. Sobre o lado $\overline{AB}$, tome o ponto E tal que $A\hat{C}E = 15°$. Sobre o lado $\overline{AC}$, tome o ponto D tal que $D\hat{B}C = 35°$. Então, o ângulo $E\hat{D}B$ vale

A ( ) $35°$ **B** ( ) $45°$ **C** ( ) $55°$ **D** ( ) $75°$ **E** ( ) $85°$

Questão 19. Sejam X, Y, Z, W subconjuntos de $\mathbb{N}$ tais que $(X - Y) \cap Z = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{5, 6\}$, $Z \cap Y = \emptyset$, $W \cap (X - Z) = \{7, 8\}$, $X \cap W \cap Z = \{2, 4\}$. Então o conjunto $[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)]$ é igual a

A ( ) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ **B** ( ) $\{1, 2, 3, 4, 7\}$ **C** ( ) $\{1, 3, 7, 8\}$

D ( ) $\{1, 3\}$ **E** ( ) $\{7, 8\}$

Questão 20. Sejam r e s duas retas paralelas distando 10 cm entre si. Seja P um ponto no plano definido por r e s e exterior à região limitada por estas retas, distando 5 cm de r. As respectivas medidas da área e do perímetro, em cm^2 e cm, do triângulo equilátero PQR cujos vértices Q e R estão, respectivamente, sobre as retas r e s, são iguais a

A ( ) $175\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $5\sqrt{21}$ **B** ( ) $175\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $10\sqrt{21}$ **C** ( ) $175\sqrt{3}$ e $10\sqrt{21}$

D ( ) $175\sqrt{3}$ e $5\sqrt{21}$ **E** ( ) 700 e $10\sqrt{21}$

As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser resolvidas e respondidas no caderno de soluções.

Questão 21. Dado o conjunto $A = \left\{x \in \mathbb{R}; \sqrt{3x^2 + 2x} < x^2\right\}$, expresse-o como união de intervalos da reta real.

Questão 22. Determine as raízes em $\mathbb{C}$ de $4z^6 + 256 = 0$, na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, que pertençam a

$$S = \{z \in \mathbb{C};\ 1 < |z + 2| < 3\}.$$

Questão 23. Seja $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Determine as funções $h, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = g(x) + h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, sendo h uma função par e g uma função ímpar.

Questão 24. Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Considere o polinômio $p(x)$ dado por

$$x^5 - 9x^4 + (\alpha - \beta - 2\gamma)\,x^3 + (\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2)\,x^2 + (\alpha - \beta - \gamma + 1)\,x + (2\alpha + \beta + \gamma - 1).$$

Encontre todos os valores de α, β e γ de modo que $x = 0$ seja uma raiz com multiplicidade 3 de $p(x)$.

Questão 25. Uma matriz real quadrada A é ortogonal se A é inversível e $A^{-1} = A^t$. Determine todas as matrizes 2×2 que são simétricas e ortogonais, expressando-as, quando for o caso, em termos de seus elementos que estão fora da diagonal principal.

Questão 26. Determine todos os valores $\alpha \in \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tais que a equação (em x)

$$x^4 - 2\sqrt[4]{3}\,x^2 + \operatorname{tg}\alpha = 0$$

admita apenas raízes reais simples.

Questão 27. Em um espaço amostral com uma probabilidade P, são dados os eventos A, B e C tais que: $P(A) = P(B) = 1/2$, com A e B independentes, $P(A \cap B \cap C) = 1/16$, e sabe-se que $P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = 3/10$. Calcule as probabilidades condicionais $P(C|A \cap B)$ e $P\left(C|A \cap B^C\right)$.

Questão 28. Um triângulo acutângulo de vértices A, B e C está inscrito numa circunferência de raio $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$. Sabe-se que $\overline{AB}$ mede $2\sqrt{5}$ e $\overline{BC}$ mede $2\sqrt{2}$. Determine a área do triângulo ABC.

Questão 29. Seja C uma circunferência de raio r e centro O e $\overline{AB}$ um diâmetro de C. Considere o triângulo equilátero BDE inscrito em C. Traça-se a reta s passando pelos pontos O e E até interceptar em F a reta t tangente à circunferência C no ponto A. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pelo arco $\overset{\frown}{AE}$ e pelos segmentos $\overline{AF}$ e $\overline{EF}$ em torno do diâmetro $\overline{AB}$.

Questão 30. Considere a parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, que passa pelos pontos $(2,5)$, $(-1,2)$ e tal que a, b, c formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Determine a distância do vértice da parábola à reta tangente à parábola no ponto $(2,5)$.

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA
VESTIBULAR 2008

GABARITO

Matemática	
1	A
2	B
3	A
4	D
5	B
6	E
7	D
8	A
9	C
10	E
11	B
12	E
13	C
14	D
15	C
16	E
17	A
18	D
19	C
20	B

ITA Matemática 2008 - Gabarito

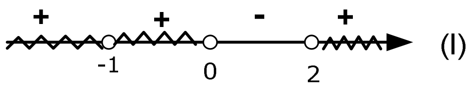
01. A	**02.** B	**03.** A	**04.** D
05. B	**06.** E	**07.** D	**08.** A
09. C	**10.** E	**11.** B	**12.** E
13. C	**14.** D	**15.** C	**16.** E
17. A	**18.** D	**19.** C	**20.** B

Discursivas

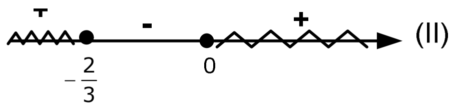
21. Temos:

$\sqrt{3x^2+2x} < x^2 \Rightarrow 3x^2 + 2x < x^4 \Rightarrow$
$x^4 - 3x^2 - 2x > 0$

O polinômio $P(x) = x^4 - 3x^2 - 2x$ tem como raízes -1 (raiz dupla), 0 e 2.
Queremos $P(x) > 0$, ou seja, $x(x+1)^2 (x-2) > 0$. Assim, segue:

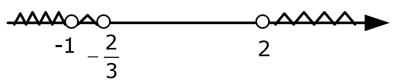


Mas temos ainda que $3x^2 + 2x \geq 0$, ou seja, $x(3x+2) \geq 0$.
Daí vem:



Fazendo a intersecção, obtém-se:

(I) $\cap$ (II)



Logo, o conjunto solução é dado por

$$\boxed{S = \left\{x \in R \,\middle|\, x < -\frac{2}{3} \text{ ou } x > 2 \text{ e } x \neq -1\right\}}$$

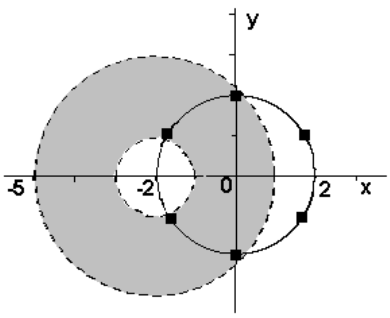
22.

$4z^6 + 256 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{-64}$

$\Rightarrow V = \left\{2cis\frac{\pi}{6}; 2cis\frac{\pi}{2}; 2cis\frac{5\pi}{6}; 2cis\frac{7\pi}{6}; 2cis\frac{3\pi}{2}; 2cis\frac{11\pi}{6}\right\}$

A região limitada pela inequação $1 < |z+2| < 3$ é a coroa circular (ver figura) de raios 3 e 1 e centro no ponto (-2, 0). Assim, as únicas duas raízes da equação que não pertencem à região hachurada são $2cis\frac{\pi}{6}$ e $2cis\frac{11\pi}{6}$.

$$\boxed{\text{Então: } S \cap V = \{\pm 2i \; ; \; -\sqrt{3} \pm i\}}$$



23. Observe que, dada uma função f(x), ela pode ser decomposta na soma de uma função par com uma função ímpar. Para tanto, note que:

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

onde a função $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ é par e a função $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ é ímpar. Assim:

$$h(x) = \frac{\ln(x^2+x+1)+\ln(x^2-x+1)}{2} = \frac{\ln((x^2+1)^2-x^2)}{2} \Rightarrow$$

$$h(x) = \frac{1}{2}\ln(x^4+x^2+1).$$

$$g(x) = \frac{\ln(x^2+x+1)-\ln(x^2-x+1)}{2} = \frac{\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)}{2} \Rightarrow$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right).$$

Logo, $\boxed{f(x) = \frac{1}{2}\ln(x^4+x^2+1) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)}$.

24. Como 0 é raiz tripla de ρ, temos que
$\rho(x) = x^3.q(x), \; q \in \mathbb{R}[x].$

Logo é necessário e suficiente que

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 2\gamma - 2 = 0 \\ \alpha - \beta - \gamma + 1 = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 1 \end{cases}$$

A resposta é $\alpha = 0, \; \beta + \gamma = 1, \; \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Como 0 é raiz tripla de ρ, temos que
$\rho(x) = x^3.q(x), \; q \in \mathbb{R}[x].$

Logo é necessário e suficiente que

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 2\gamma - 2 = 0 \\ \alpha - \beta - \gamma + 1 = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 1 \end{cases}$$

A resposta é

$$\boxed{\alpha = 0, \; \beta + \gamma = 1, \; \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \beta \neq 2, \gamma \neq -1.}$$

25. De $A^{-1} = A^t$, temos: $A^t \cdot A = I$

Como A é simétrica, temos $A^t = A$. Logo: $A^2 = I$. (*)
Além disso, por ser A simétrica ela é da forma:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

A partir de (*):

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a^2+b^2 = 1 \\ ab+bc = 0 \\ b^2+c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 1 \\ b(a+c) = 0 \\ b^2+c^2 = 1 \end{cases}$$

Da segunda equação:

b = 0 ou a + c = 0

Se b = 0, então $a = \pm 1$ e $c = \pm 1$.

Se a + c = 0, ou seja, a = - c, Dado que $a^2 = 1 - b^2$,

temos: $a = \pm\sqrt{1-b^2}$. Portanto: $c = \mp\sqrt{1-b^2}$.

Sendo assim:

$$\boxed{\begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{1-b^2} & b \\ b & \mp\sqrt{1-b^2} \end{bmatrix}, \text{ com } b \in [-1,1] \text{ ou} \\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}}$$

26. Para que a equação em x tenha apenas raízes reais simples é necessário e suficiente que a equação em y

$$y^2 - 2\sqrt[4]{3}y + \text{tg}\alpha = 0$$

Tenha duas raízes reais positivas distintas. A condição para raízes reais distintas é

$$\Delta > 0 \iff \text{tg}\alpha < \sqrt{3}.$$

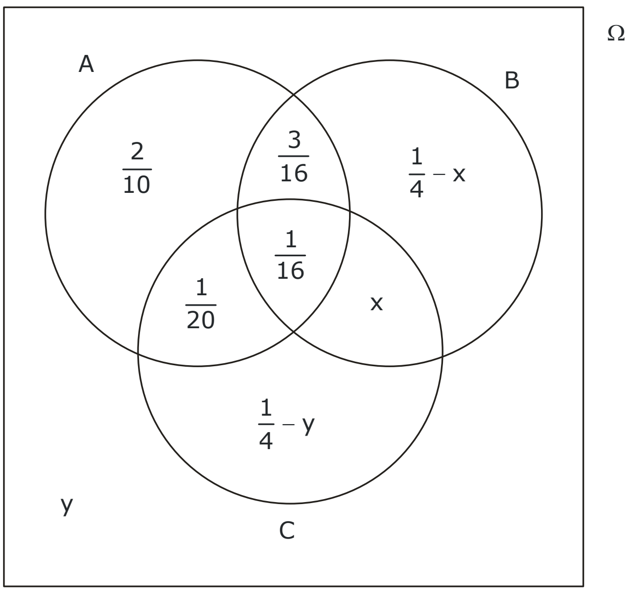
Além disso, a menor raiz deve ser positiva, ou seja,

$$\sqrt[4]{3} - \sqrt{\sqrt{3} - \text{tg}\alpha} > 0 \iff a < \text{tg}\alpha < \sqrt{3}.$$

Assim, o conjunto de todos os valores de α pedidos é

$$\boxed{\left]0, \frac{\pi}{3}\right[.}$$

27.



Como A e B são independentes,

$$P(C/A \cap B) = \frac{P(C \cap (A \cap B))}{P(A \cap B)} =$$

$$= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A).P(B)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$\iff \boxed{P(C/A \cap B) = \frac{1}{4}}$$

Novamente, como A e B são independentes,

$$P(A \cap B) = P(\overline{A} \cap B) = P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{4}.$$

Em particular,

$$P(A \cap B \cap \overline{C}) = P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) = \frac{3}{16}.$$

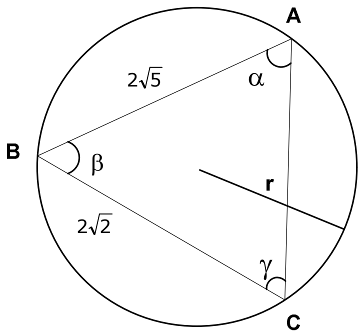
Como

$$P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = P(A \cap (B \cup C)) = \frac{3}{10},$$

$$P(A \cap \overline{B} \cap C) = \frac{1}{20}$$

e $\boxed{P(C/A \cap \overline{B}) = \frac{P(C \cap (A \cap \overline{B}))}{P(A \cap \overline{B})} = \frac{1}{5}.}$

28.



Pela lei dos senos temos:

$$\frac{2\sqrt{2}}{\text{sen}\alpha} = \frac{2\sqrt{5}}{\text{sen}\gamma} = 2r \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\text{sen}\alpha} = \frac{2\sqrt{5}}{\text{sen}\gamma} = \frac{10\sqrt{2}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{3}{5} \text{ e sen}\gamma = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

sen β = sen [180º - (α + γ)] = sen (α + γ) = sen α cos γ + sen γ cos α $= \frac{3}{5}.\frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{3\sqrt{10}}{10}.\frac{4}{5}$, pois

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2} \text{ e } \cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}.$$ Assim,

segue:

$$\text{sen}\beta = \frac{3\sqrt{10}}{50} + \frac{12\sqrt{10}}{50} = \frac{15\sqrt{10}}{50} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

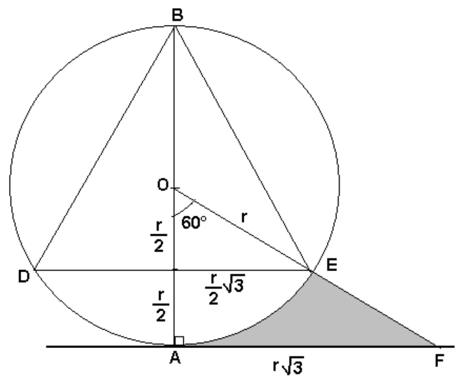
A área do ΔABC é dada por:

A

$$\text{Área}\,\Delta ABC = \frac{1}{2}.\,2\sqrt{5}\,.\,2\sqrt{2}\,.\,\text{sen}\beta = \frac{1}{2}.\,2\sqrt{5}\,.\,2\sqrt{2}\,.\,\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$= \frac{2\sqrt{10}\,.\,3\sqrt{10}}{10} = 6 \text{ u.a} \iff \boxed{\text{Área}\,\Delta ABC = 6 \text{ u.a}}$$

29. A figura em questão é dada pelo esquema abaixo:



A rotação de AEF em torno do eixo AB gera um sólido cujo volume é dado pela retirada de uma calota esférica (altura r/2 e raio da seção $r\sqrt{3}/2$), de um tronco de cone (altura r/2 e raios de base $r\sqrt{3}/2$ e $r\sqrt{3}$).

$$V_{TRONCO} = \frac{h}{3}\left(S_B + S_b + \sqrt{S_B . S_b}\right) \Rightarrow$$

$$V_{TRONCO} = \frac{r}{6}\left(3\pi r^2 + \frac{3\pi r^2}{4} + \sqrt{3\pi r^2 . \frac{3\pi r^2}{4}}\right) = \frac{21\pi r^3}{24}$$

$$V_{CALOTA} = \frac{\pi h}{6}\left(3R^2 + h^2\right) = \frac{\pi r}{12}\left[3\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2\right] = \frac{5\pi r^3}{24}$$

$$\boxed{V_S = V_{TRONCO} - V_{CALOTA} = \frac{21\pi r^3}{24} - \frac{5\pi r^3}{24} = \frac{2}{3}\pi r^3}$$

30. Como a, b e c estão em P.A., podemos escrever:

a = b - r , c = b + r.

Substituindo então esses valores na equação da parábola, encontramos $y = (b - r)x^2 + bx + b + r$.
Como os pontos (2,5) e (-1,2) estão na parábola, temos:

$$\begin{cases} 4(b - r) + 2b + b + r = 5 \\ b - r - b + b + b + r = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7b - 3r = 5 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ r = 3 \end{cases}$$

Assim, temos que a = 2 – 3 = -1 e c = 2 + 3 = 5. Desse modo, a parábola é $y = -x^2 + 2x + 5$.
Seja r a reta que tangente à parábola em (2,5). Usando a relação $y - y_o = m(x - x_o)$, temos:

r: y = m(x - 2) +5

Igualando as equações da parábola e da reta:

$$m(x - 2) + 5 = -x^2 + 2x + 5 \Rightarrow x^2 + (m - 2)x - 2m = 0$$

Como a reta é tangente, existe um único valor de x que deve satisfazer a equação do segundo grau acima, de modo que obrigatoriamente temos que o discriminante dessa equação deve ser zero. Assim:

$$m^2 + 4m + 4 = 0 \Rightarrow m = -4 \pm \frac{\sqrt{4^2 - 4.4}}{2} \Rightarrow m = -2$$

Logo, a reta tangente é y+2x-9=0.
O vértice da parábola é dado por:

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{-2}{-2}, -\frac{2^2 - 4.(-1).5}{-4}\right) = (1,6).$$

Aplicando finalmente a fórmula da distância de ponto à reta, encontramos:

$$\boxed{\text{distância} = \left|\frac{6 + 2.1 - 9}{\sqrt{1^2 + 2^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}}$$

Cortesia:
Resoluções Alferes Vestibulares