ITA 2004
MATEMÁTICA

Vestibular

NOTAÇÕES

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos.
$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais.
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais.
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
i : unidade imaginária; $i^2 = -1$.
$z = x + iy,\ x,\ y \in \mathbb{R}$.
$\bar{z}$: conjugado do número z, $z \in \mathbb{C}$.
$|z|$: módulo do número z, $z \in \mathbb{C}$.
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$.
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$.

$\varnothing$: conjunto vazio.
$A \setminus B = \{x \in A;\ x \notin B\}$.
$n(U)$: número de elementos do conjunto U.
$\mathcal{P}(A)$: coleção de todos os subconjuntos de A.
$f \circ g$: função composta de f com g.
I : matriz identidade $n \times n$.
A^{-1} : inversa da matriz inversível A.
A^T : transposta da matriz A.
$\det A$: determinante da matriz A.
$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B.
$\widehat{AB}$: arco de circunferência de extremidades A e B.
$m(\overline{AB})$: medida (comprimento) de $\overline{AB}$.

Questão 1. Considere as seguintes afirmações sobre o conjunto $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:

I. $\varnothing \in U$ e $n(U) = 10$.
II. $\varnothing \subset U$ e $n(U) = 10$.
III. $5 \in U$ e $\{5\} \subset U$.
IV. $\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = 5$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I e III. **B** ( ) apenas II e IV. **C** ( ) apenas II e III.
D ( ) apenas IV. **E** ( ) todas as afirmações.

Questão 2. Seja o conjunto $S = \{ r \in \mathbb{Q} : r \geq 0 \text{ e } r^2 \leq 2 \}$, sobre o qual são feitas as seguintes afirmações:

I. $\frac{5}{4} \in S$ e $\frac{7}{5} \in S$.
II. $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\} \cap S = \varnothing$.
III. $\sqrt{2} \in S$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s) apenas

A ( ) I e II **B** ( ) I e III **C** ( ) II e III **D** ( ) I **E** ( ) II

Questão 3. Seja α um número real, com $0<\alpha<1$. Assinale a alternativa que representa o conjunto de todos os valores de x tais que $\alpha^{2x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{2x^2} < 1$.

A ( ) $]-\infty,0] \cup [2,+\infty[$ **B** ( ) $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$ **C** ( ) $]0,2[$

D ( ) $]-\infty,0[$ **E** ( ) $]2,+\infty[$

Questão 4. Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $f(x)=2\cos x+2i\,\mathrm{sen}\,x$. Então, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$, o valor do produto $f(x)f(y)$ é igual a

A ( ) $f(x+y)$ **B** ( ) $2f(x+y)$ **C** ( ) $4i\,f(x+y)$

D ( ) $f(xy)$ **E** ( ) $2f(x)+2i\,f(y)$

Questão 5. Considere 12 pontos distintos dispostos no plano, 5 dos quais estão numa mesma reta. Qualquer outra reta do plano contém, no máximo, 2 destes pontos. Quantos triângulos podemos formar com os vértices nestes pontos?

A ( ) 210 **B** ( ) 315 **C** ( ) 410 **D** ( ) 415 **E** ( ) 521

Questão 6. Seja $x\in\mathbb{R}$ e a matriz $A=\begin{bmatrix} 2^x & (x^2+1)^{-1} \\ 2^x & \log_2 5 \end{bmatrix}$. Assinale a opção correta.

A ( ) $\forall x\in\mathbb{R}$, A possui inversa.
B ( ) Apenas para $x>0$, A possui inversa.
C ( ) São apenas dois os valores de x para os quais A possui inversa.
D ( ) Não existe valor de x para o qual A possui inversa.
E ( ) Para $x=\log_2 5$, A não possui inversa.

Questão 7. Considerando as funções

$$\mathrm{arc\,sen}:[-1,+1]\to[-\pi/2,\ \pi/2] \quad \text{e} \quad \mathrm{arc\,cos}:[-1,+1]\to[0,\ \pi],$$

assinale o valor de $\cos\left(\mathrm{arcsen}\dfrac{3}{5}+\mathrm{arccos}\dfrac{4}{5}\right)$.

A ( ) $\dfrac{6}{25}$ **B** ( ) $\dfrac{7}{25}$ **C** ( ) $\dfrac{1}{3}$ **D** ( ) $\dfrac{2}{5}$ **E** ( ) $\dfrac{5}{12}$

Questão 8. Considere um polígono convexo de nove lados, em que as medidas de seus ângulos internos constituem uma progressão aritmética de razão igual a 5°. Então, seu maior ângulo mede, em graus,

A ( ) 120 **B** ( ) 130 **C** ( ) 140 **D** ( ) 150 **E** ( ) 160

Questão 9. O termo independente de x no desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt{\dfrac{3\sqrt[3]{x}}{5x}} - \sqrt[3]{\dfrac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^{12}$ é

A ( ) $729\sqrt[3]{45}$ **B** ( ) $972\sqrt[3]{15}$ **C** ( ) $891\sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}$ **D** ( ) $376\sqrt[3]{\dfrac{5}{3}}$ **E** ( ) $165\sqrt[3]{75}$

Questão 10. Considere as afirmações dadas a seguir, em que A é uma matriz quadrada $n \times n$, $n \geq 2$:

I. O determinante de A é nulo se e somente se A possui uma linha ou uma coluna nula.
II. Se $A = (a_{ij})$ é tal que $a_{ij} = 0$ para $i > j$, com $i, j = 1, 2, ..., n$, então $\det A = a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$.
III. Se B for obtida de A, multiplicando-se a primeira coluna por $\sqrt{2}+1$ e a segunda por $\sqrt{2}-1$, mantendo-se inalteradas as demais colunas, então $\det B = \det A$.

Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas II. **B** ( ) apenas III. **C** ( ) apenas I e II.

D ( ) apenas II e III. **E** ( ) todas.

Questão 11. Considere um cilindro circular reto, de volume igual a 360π cm^3, e uma pirâmide regular cuja base hexagonal está inscrita na base do cilindro. Sabendo que a altura da pirâmide é o dobro da altura do cilindro e que a área da base da pirâmide é de $54\sqrt{3}$ cm^2, então, a área lateral da pirâmide mede, em cm^2,

A ( ) $18\sqrt{427}$ **B** ( ) $27\sqrt{427}$ **C** ( ) $36\sqrt{427}$ **D** ( ) $108\sqrt{3}$ **E** ( ) $45\sqrt{427}$

Questão 12. O conjunto de todos os valores de α, $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, tais que as soluções da equação (em x)

$$x^4 - \sqrt[4]{48}\,x^2 + \operatorname{tg}\alpha = 0$$

são todas reais, é

A ( ) $\left[-\dfrac{\pi}{3}, 0\right]$ **B** ( ) $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ **C** ( ) $\left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right]$ **D** ( ) $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ **E** ( ) $\left[\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{3}\right]$

Questão 13. Sejam as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + \alpha x$ e $g(x) = -(x^2 + \beta x)$, em que α e β são números reais. Considere que estas funções são tais que

f		g	
Valor mínimo	*Ponto de mínimo*	*Valor máximo*	*Ponto de máximo*
-1	< 0	$\dfrac{9}{4}$	>0

Então, a soma de todos os valores de x para os quais $(f \circ g)(x) = 0$ é igual a

A ( ) 0 **B** ( ) 2 **C** ( ) 4 **D** ( ) 6 **E** ( ) 8

Questão 14. Considere todos os números $z = x + iy$ que têm módulo $\sqrt{7}/2$ e estão na elipse $x^2 + 4y^2 = 4$. Então, o produto deles é igual a

A ( ) $\frac{25}{9}$ **B** ( ) $\frac{49}{16}$ **C** ( ) $\frac{81}{25}$ **D** ( ) $\frac{25}{7}$ **E** ( ) 4

Questão 15. Para algum número real r, o polinômio $8x^3 - 4x^2 - 42x + 45$ é divisível por $(x-r)^2$. Qual dos números abaixo está mais próximo de r?

A ( ) $1{,}62$ **B** ( ) $1{,}52$ **C** ( ) $1{,}42$ **D** ( ) $1{,}32$ **E** ( ) $1{,}22$

Questão 16. Assinale a opção que representa o lugar geométrico dos pontos (x,y) do plano que satisfazem a equação

$$\det \begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 40 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 288 .$$

A ( ) Uma elipse. **B** ( ) Uma parábola. **C** ( ) Uma circunferência.

D ( ) Uma hipérbole. **E** ( ) Uma reta.

Questão 17. A soma das raízes da equação $z^3 + z^2 - |z|^2 + 2z = 0$, $z \in \mathbb{C}$, é igual a

A ( ) -2 **B** ( ) -1 **C** ( ) 0 **D** ( ) 1 **E** ( ) 2

Questão 18. Dada a equação $x^3 + (m+1)x^2 + (m+9)x + 9 = 0$, em que m é uma constante real, considere as seguintes afirmações:

I. Se $m \in \left]-6,6\right[$, então existe apenas uma raiz real.
II. Se $m = -6$ ou $m = +6$, então existe raiz com multiplicidade 2.
III. $\forall m \in \mathbb{R}$, todas as raízes são reais.

Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s) apenas

A ( ) I **B** ( ) II **C** ( ) III **D** ( ) II e III **E** ( ) I e II

Questão 19. Duas circunferências concêntricas C_1 e C_2 têm raios de $6\,\text{cm}$ e $6\sqrt{2}\,\text{cm}$, respectivamente. Seja $\overline{AB}$ uma corda de C_2, tangente à C_1. A área da menor região delimitada pela corda $\overline{AB}$ e pelo arco $\overset{\frown}{AB}$ mede, em cm^2,

A ( ) $9(\pi-3)$ **B** ( ) $18(\pi+3)$ **C** ( ) $18(\pi-2)$ **D** ( ) $18(\pi+2)$ **E** ( ) $16(\pi+3)$

Questão 20. A área total da superfície de um cone circular reto, cujo raio da base mede R cm, é igual à terça parte da área de um círculo de diâmetro igual ao perímetro da seção meridiana do cone. O volume deste cone, em cm^3, é igual a

A ( ) πR^3 **B** ( ) $\pi\sqrt{2}\,R^3$ **C** ( ) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}R^3$ **D** ( ) $\pi\sqrt{3}\,R^3$ **E** ( ) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}R^3$

As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser resolvidas e respondidas no caderno de soluções.

Questão 21. Seja A um conjunto não-vazio.

a. Se $n(A) = m$, calcule $n(\mathcal{P}(A))$ em termos de m.

b. Denotando $\mathcal{P}^1(A) = \mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}^{k+1}(A) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^k(A))$, para todo número natural $k \geq 1$, determine o menor k, tal que $n(\mathcal{P}^k(A)) \geq 65000$, sabendo que $n(A) = 2$.

Questão 22. Uma caixa branca contém 5 bolas verdes e 3 azuis, e uma caixa preta contém 3 bolas verdes e 2 azuis. Pretende-se retirar uma bola de uma das caixas. Para tanto, 2 dados são atirados. Se a soma resultante dos dois dados for menor que 4, retira-se uma bola da caixa branca. Nos demais casos, retira-se uma bola da caixa preta. Qual é a probabilidade de se retirar uma bola verde?

Questão 23. Determine os valores reais do parâmetro a para os quais existe um número real x satisfazendo $\sqrt{1-x^2} \geq a - x$.

Questão 24. Sendo $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, calcule $\left|\sum_{n=1}^{60} z^n\right| = \left|z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{60}\right|$.

Questão 25. Para $b > 1$ e $x > 0$, resolva a equação em x: $(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0$.

Questão 26. Considere a equação $x^3 + 3x^2 - 2x + d = 0$, em que d é uma constante real. Para qual valor de d a equação admite uma raiz dupla no intervalo $]0,1[$?

Questão 27. Prove que, se os ângulos internos α, β e γ de um triângulo satisfazem a equação

$$\text{sen}(3\alpha) + \text{sen}(3\beta) + \text{sen}(3\gamma) = 0,$$

então, pelo menos, um dos três ângulos α, β ou γ é igual a 60°.

Questão 28. Se A é uma matriz real, considere as definições:

I. Uma matriz quadrada A é ortogonal se e só se A for inversível e $A^{-1} = A^T$.
II. Uma matriz quadrada A é diagonal se e só se $a_{ij} = 0$, para todo $i, j = 1, \ldots, n$, com $i \neq j$.

Determine as matrizes quadradas de ordem 3 que são, simultaneamente, diagonais e ortogonais.

Questão 29. Sejam r e s duas retas que se interceptam segundo um ângulo de 60°. Seja C_1 uma circunferência de 3 cm de raio, cujo centro O se situa em s, a 5 cm de r. Determine o raio da menor circunferência tangente à C_1 e à reta r, cujo centro também se situa na reta s.

Questão 30. Sejam os pontos $A:(2,\, 0)$, $B:(4,\, 0)$ e $P:\left(3,\, 5+2\sqrt{2}\right)$.

a. Determine a equação da circunferência *C*, cujo centro está situado no primeiro quadrante, passa pelos pontos A e B e é tangente ao eixo *y*.

b. Determine as equações das retas tangentes à circunferência *C* que passam pelo ponto *P*.