ITA 2002
MATEMÁTICA

Vestibular

NOTAÇÕES

C é o conjunto dos números complexos.
R é o conjunto dos números reais.
N = {1,2,3,...}
i denota a unidade imaginária, ou seja, $i^2 = -1$.
$\overline{z}$ é o conjugado do número complexo z.
Se X é um conjunto, $P(X)$ denota o conjunto de todos os subconjuntos de X.
$A \setminus B = \{x \in A \,;\, x \notin B\}$.

$[a,b] = \{X \in R; a \le x \le b\}$

$[a,\infty) = \{X \in R; a \le x\}$.
$(-\infty,a] = \{X \in R; x \le a\}$.
$P = (x,y)$ significa ponto P de coordenadas (x,y).
$\overline{AB}$ denota o segmento que une os pontos A e B.
$\ln x$ denota o logarítmo natural de x.
A^t denota a matriz transposta da matriz A.

Questão 01. Considere as seguintes afirmações sobre números reais positivos:

I. Se $x > 4$ e $y < 2$, então $x^2 - 2y > 12$.
II. Se $x > 4$ ou $y < 2$, então $x^2 - 2y > 12$.
III. Se $x^2 < 1$ e $y^2 > 2$, então $x^2 - 2y < 0$.

Então, destas é (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I. **B** ( ) apenas I e II. **C** ( ) apenas II e III. **D** ( ) apenas I e III. **E** ( ) todas.

Questão 02. Sejam a,b,c reais não-nulos e distintos, $c > 0$. Sendo par a função dada por

$$f(x) = \frac{ax+b}{x+c} \quad , \quad -c < x < c \ ,$$

então $f(x)$, para $-c < x < c$, é constante e igual a

A ( ) $a+b$. **B** ( ) $a+c$. **C** ( ) c. **D** ( ) b. **E** ( ) a.

Questão 03. Os valores de $x \in R$, para os quais a função real dada por $f(x) = \sqrt{5 - \left|\,|2x-1| - 6\right|}$ está definida, formam o conjunto

A ( ) $[0, 1]$. **B** ( ) $[-5, 6]$. **C** ( ) $[-5, 0] \cup [1,\infty)$.
D ( ) $(-\infty,0] \cup [1, 6]$. **E** ( ) $[-5, 0] \cup [1, 6]$.

Questão 04. Seja a equação em C

$$z^4 - z^2 + 1 = 0.$$

Qual dentre as alternativas abaixo é igual à soma de duas das raízes dessa equação ?

A ( ) $2\sqrt{3}$. **B** ( ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C** ( ) $+\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D** ( ) $-i$. **E** ( ) $\frac{i}{2}$.

Questão 05. Sejam A um conjunto com 8 elementos e B um conjunto tal que $A \cup B$ contenha 12 elementos. Então, o número de elementos de $P(B \setminus A) \cup P(\varnothing)$ é igual a

A ( ) 8. **B** ( ) 16. **C** ( ) 20. **D** ( ) 17. **E** ( ) 9.

Questão 06. Sejam f e g duas funções definidas por

$$f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{3\,sen\,x - 1} \quad \text{e} \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3\,sen^2 x - 1}, \quad x \in \text{□}.$$

A soma do valor mínimo de f com o valor mínimo de g é igual a

A ( ) 0. **B** ( ) $-\frac{1}{4}$. **C** ( ) $\frac{1}{4}$. **D** ( ) $\frac{1}{2}$. **E** ( ) 1.

Questão 07. Seja $f: R \to P(R)$ dada por

$$f(x) = \{y \in R; sen \quad y < x\}.$$

Se A é tal que $f(x) = R, \forall x \in A$, então

A ( ) $A = [-1, 1]$. **B** ( ) $A = [a, \infty)$, $\forall\, a > 1$. **C** ( ) $A = [a, \infty)$, $\forall\, a \geq 1$.
D ( ) $A = (-\infty, a]$, $\forall\, a < -1$. **E** ( ) $A = (-\infty, a]$, $\forall\, a \leq -1$.

Questão 08. A divisão de um polinômio $f(x)$ por $(x-1)(x-2)$ tem resto $x+1$. Se os restos das divisões de $f(x)$ por $x-1$ e $x-2$ são, respectivamente, os números a e b, então $a^2 + b^2$ vale

A ( ) 13. **B** ( ) 5. **C** ( ) 2. **D** ( ) 1. **E** ( ) 0.

Questão 09. Sabendo que a equação

$$X^3 - px^2 = q^m, \quad p, q > 0, \quad q \neq 1, \quad m \in N,$$

possui três raízes reais positivas a, b e c, então

$$log_q \left[a\,b\,c\,(a^2 + b^2 + c^2)^{a+b+c}\right]$$

é igual a

A ( ) $2m + p\,log_q\,p$. **B** ( ) $m + 2\,p\,log_q\,p$. **C** ( ) $m + p\,log_q\,p$.
D ( ) $m - p\,log_q\,p$. **E** ( ) $m - 2\,p\,log_q\,p$.

Questão 10. Dada a função quadrática

$$f(x) = x^2\,ln\frac{2}{3} + x\,ln6 - \frac{1}{4}\,ln\frac{3}{2}$$

temos que

A ( ) a equação $f(x) = 0$ não possui raízes reais.
B ( ) a equação $f(x) = 0$ possui duas raízes reais distintas e o gráfico de f possui concavidade para cima.
C ( ) a equação $f(x) = 0$ possui duas raízes reais iguais e o gráfico de f possui concavidade para baixo.
D ( ) o valor máximo de f é $\dfrac{ln2\;ln3}{ln3 - ln2}$.

E ( ) o valor máximo de f é $2\,\dfrac{\ln 2\ \ln 3}{\ln 3 - \ln 2}$.

Questão 11. Quantos anagramas com 4 letras distintas podemos formar com as 10 primeiras letras do alfabeto e que contenham 2 das letras *a*, *b* e *c*?

A ( ) 1692. **B** ( ) 1572. **C** ( ) 1520. **D** ( ) 1512. **E** ( ) 1392.

Questão 12. O seguinte trecho de artigo de um jornal local relata uma corrida beneficente de bicicletas: "Alguns segundos após a largada, Ralf tomou a liderança, seguido de perto por David e Rubinho, nesta ordem. Daí em diante, eles não mais deixaram as primeiras três posições e, em nenhum momento da corrida, estiveram lado a lado mais do que dois competidores. A liderança, no entanto, mudou de mãos nove vezes entre os três, enquanto que em mais oito ocasiões diferentes aqueles que corriam na segunda e terceira posições trocaram de lugar entre si. Após o término da corrida, Rubinho reclamou para nossos repórteres que David havia conduzido sua bicicleta de forma imprudente pouco antes da bandeirada de chegada. Desse modo, logo atrás de David, Rubinho não pôde ultrapassá-lo no final da corrida."
Com base no trecho acima, você conclui que

A ( ) David ganhou a corrida.
B ( ) Ralf ganhou a corrida.
C ( ) Rubinho chegou em terceiro lugar.
D ( ) Ralf chegou em segundo lugar.
E ( ) não é possível determinar a ordem de chegada, porque o trecho não apresenta uma descrição matematicamente correta.

Questão 13. Seja a matriz

$$\begin{bmatrix} \cos 25^0 & \operatorname{sen} 65^0 \\ \operatorname{sen} 120^0 & \cos 390^0 \end{bmatrix}.$$

O valor de seu determinante é

A ( ) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **B** ( ) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **C** ( ) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D** ( ) 1. **E** ( ) 0.

Questão 14. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n tais que $AB = A$ e $BA = B$.
Então, $\left[(A+B)^t\right]^2$ é igual a

A ( ) $(A+B)^2$.
B ( ) $2\,(A^t . B^t)$.
C ( ) $2\,(A^t + B^t)$.
D ( ) $A^t + B^t$.
E ( ) $A^t\ B^t$.

Questão 15. Seja A uma matriz real 2×2. Suponha que α e β sejam dois números distintos, e V e W duas matrizes reais 2×1 não-nulas, tais que

$$AV = \alpha V \quad \text{e} \quad AW = \beta W.$$

Se $a, b \in R$ são tais que $aV + bW$ é igual à matriz nula 2×1, então $a + b$ vale

A ( ) 0. **B** ( ) 1. **C** ( ) -1. **D** ( ) $\frac{1}{2}$. **E** ( ) $-\frac{1}{2}$.

Questão 16. O triângulo ABC, inscrito numa circunferência, tem um lado medindo $\frac{20}{\pi}$ cm, cujo ângulo oposto é de 15^o. O comprimento da circunferência, em cm, é

A ( ) $20\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$. **B** ( ) $400\left(2+\sqrt{3}\right)$. **C** ( ) $80\left(1+\sqrt{3}\right)$.
D ( ) $10\left(2\sqrt{3}+5\right)$. **E** ( ) $20\left(1+\sqrt{3}\right)$.

Questão 17. Num sistema de coordenadas cartesianas, duas retas r e s, com coeficientes angulares 2 e $\frac{1}{2}$, respectivamente, se interceptam na origem 0. Se $B \in r$ e $C \in s$ são dois pontos no primeiro quadrante tais que o segmento $\overline{BC}$ é perpendicular a r e a área do triângulo OBC é igual a 12×10^{-1}, então a distância de B ao eixo das ordenadas vale

A ( ) $\frac{8}{5}$. **B** ( ) $\frac{4}{5}$. **C** ( ) $\frac{2}{5}$. **D** ( ) $\frac{1}{5}$. **E** ( ) 1.

Questão 18. Seja $k > 0$ tal que a equação $\left(x^2 - x\right) + k\left(y^2 - y\right) = 0$ define uma elipse com distância focal igual a 2. Se $\left(p,q\right)$ são as coordenadas de um ponto da elipse, com $q^2 - q \neq 0$, então $\frac{p - p^2}{q^2 - q}$ é igual a

A ( ) $2+\sqrt{5}$. **B** ( ) $2-\sqrt{5}$. **C** ( ) $2+\sqrt{3}$. **D** ( ) $2-\sqrt{3}$. **E** ( ) 2.

Questão 19. Considere a região do plano cartesiano xy definida pela desigualdade

$$x^2 + 4x + y^2 - 4y - 8 \leq 0.$$

Quando esta região rodar um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ radianos em torno da reta $x + y = 0$, ela irá gerar um sólido de superfície externa total com área igual a

A ( ) $\frac{128}{3}\pi$. **B** ( ) $\frac{128}{4}\pi$. **C** ( ) $\frac{128}{5}\pi$. **D** ( ) $\frac{128}{6}\pi$. **E** ( ) $\frac{128}{7}\pi$.

Questão 20. Seja uma pirâmide regular de base hexagonal e altura 10 m. A que distância do vértice devemos cortá-la por um plano paralelo à base de forma que o volume da pirâmide obtida seja $\frac{1}{8}$ do volume da pirâmide original?

A ( ) 2 m. **B** ( ) 4 m. **C** ( ) 5 m. **D** ( ) 6 m. **E** ( ) 8 m.

As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser respondidas no caderno de soluções.

Questão 21. Seja a função f dada por

$$f\,(x) = (log_3 5)\,.\,log_5\, 8^{x-1} + log_3\, 4^{1+2x-x^2} - log_3\, 2^{x(3x+1)}.$$

Determine todos os valores de x que tornam f não-negativa.

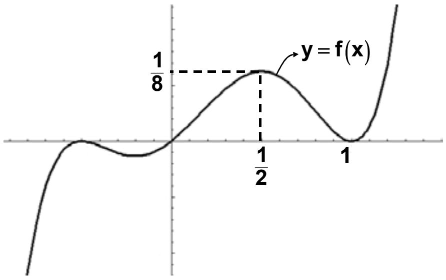
Questão 22. Mostre que

$$\left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}\right)^4 > C_{8,4},$$

para quaisquer x e y reais positivos.

Obs.: $C_{n,p}$ denota a combinação de n elementos tomados p a p.

Questão 23. Com base no gráfico da função polinomial $y = f\,(x)$ esboçado abaixo, responda qual é o resto da divisão de $f\,(x)$ por $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)$.



Questão 24. Sejam a e b dois números complexos não-nulos, tais que $a^2 + b^2 = 0$. Se $Z,\ W \in C$ satisfazem a

$$\begin{cases} \bar{z}\,w + z\,\bar{w} = 6a \\ \bar{z}\,w - z\,\bar{w} = 8b \end{cases}$$

determine o valor de $|a|$ de forma que $|z\,w| = 1$.

Questão 25.

1. Mostre que se uma matriz quadrada não–nula A satisfaz a equação

$$A^3 + 3A^2 + 2A = 0 \qquad (1)$$

então $(A + I)^3 = A + I$, em que I é a matriz identidade.

2. Sendo dado que

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

satisfaz à equação (1) acima, encontre duas matrizes não-nulas B e C tais que $B^3 + C^3 = B + C = A$. Para essas matrizes você garante que o sistema de equações

$$(B - C)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tem solução $(x, y) \neq (0,0)$? Justifique.

Questão 26. Sejam $n \geq 2$ números reais positivos $a_1, a_2, \ldots a_n$ que formam uma progressão aritmética de razão positiva. Considere $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ e responda, justificando: Para todo $n \geq 2$, qual é o maior entre os números $\left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)^2$ e $\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - a_n^{\,2}$?

Questão 27. Considere n pontos distintos $A_1, A_2, \ldots A_n$ sobre uma circunferência de raio unitário, de forma que os comprimentos dos arcos $\overset{\frown}{A_1 A_2}, \overset{\frown}{A_2 A_3}, \ldots, \overset{\frown}{A_{n-1} A_n}$ formam uma progressão geométrica de termo inicial π e razão $\frac{1}{2}$. Para que valores de $n \in N$ teremos o comprimento do arco $\overset{\frown}{A_n A_1}$ menor que $\frac{1}{512}$ do comprimento da circunferência?

Obs.: Para todo arco $\overset{\frown}{A_k A_l}$, o comprimento considerado é o do arco que une o ponto A_k ao ponto A_l no sentido anti-horário.

Questão 28. Seja S a área total da superfície de um cone circular reto de altura h, e seja m a razão entre as áreas lateral e da base desse cone. Obtenha uma expressão que forneça h em função apenas de S e m.

Questão 29. Considere o seguinte raciocínio de cunho cartesiano: "Se a circunferência de centro $C = (h,0)$ e raio r intercepta a curva $y = +\sqrt{x}$, $x > 0$, no ponto $A = (a, \sqrt{a}\,)$ de forma que o segmento $\overline{AC}$ seja perpendicular à reta tangente à curva em A, então $x = a$ é raiz dupla da equação em x que se obtém da intersecção da curva com a circunferência."

Use este raciocínio para mostrar que o coeficiente angular dessa reta tangente em A é $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Questão 30. Se x, y e z são os ângulos internos de um triângulo ABC e $sen\ x = \frac{sen\, y + sen\, z}{cos\, y + cos\, z}$, prove que o triângulo ABC é retângulo.