INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

VESTIBULAR 98

PROVA DE MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES

1. Este exame, com duração de **quatro horas**, consta de 25 **questões do tipo teste de múltipla escolha.** As 15 últimas questões, numeradas de **11 a 25**, devem ser justificadas no **caderno de respostas.**

2. Os 25 testes de múltipla escolha correspondem a 50% do valor da prova e as justificativas das questões numeradas de 11 a 25 correspondem aos 50% restantes.

3. Cada questão admite **uma única** resposta.

4. As justificativas das 15 últimas questões podem ser feitas a lápis e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Procure respeitar a ordem e o espaço disponível no caderno de respostas. Na correção serão avaliados: compreensão da questão proposta, desenvolvimento do raciocínio e emprego de linguaguem apropriada. Sempre que possível use desenhos e gráficos.

5. Você recebeu este **caderno de questões**, um **caderno de respostas** e uma **folha de rascunho.** Verifique se o caderno de questões está completo. Folhas de rascunho adicionais serão fornecidas mediante a devolução da anterior.

6. **Numere** , agora, as folhas do caderno de respostas de 11 a 25.

7. Além do material fornecido pelo fiscal, você poderá usar apenas lápis (ou lapiseira), caneta, borracha e, eventualmente, régua. Qualquer outro material, como tabelas, dispositivos computacionais ou de comunicação (relógios com rádio, calculadoras, telefones celulares, etc.,) deve ser entregue ao fiscal, que se responsabilizará por ele até o final da prova.

8. Antes de terminar a prova, você receberá uma **folha de leitura óptica.** Usando caneta azul ou preta, assinale nela a opção correspondente à resposta que você atribuiu a cada questão. Procure preencher **todo** o campo disponível para sua resposta, sem extrapolar-lhe os limites.

9. Cuidado para **não errar** no preenchimento da folha de leitura óptica. Se houver algum erro avise o fiscal, que lhe fornecerá uma folha extra, com o cabeçalho refeito.

10. No verso do **caderno de respostas** existe uma **reprodução** da folha óptica, que deverá ser preenchida com um simples traço a lápis.

11. A não devolução do caderno de respostas ou da folha de leitura óptica implica a desclassificação do candidato.

12. Nenhum candidato poderá deixar o local de exame antes de decorrida **uma hora e meia** do início da prova.

13. Aguarde o comunicado para iniciar a prova. Ao terminá-la, avise o fiscal.

Prova de Matemática - 1998

Principais notações

$[a, b] = \{x \in \boldsymbol{R} : a \leq x \leq b\}$

$[a, b[= \{x \in \boldsymbol{R} : a \leq x < b\}$

$]a, b] = \{x \in \boldsymbol{R} : a < x \leq b\}$

$]a, b[= \{x \in \boldsymbol{R} : a < x < b\}$

(a, b) – par ordenado

A^t – matriz transposta da matriz A

$]-\infty, b] = \{x \in \boldsymbol{R} :\ x \leq b\}$

$]-\infty, b[= \{x \in \boldsymbol{R} :\ x < b\}$

$[a, +\infty[= \{x \in \boldsymbol{R} : a \leq x\}$

$]a, +\infty[= \{x \in \boldsymbol{R} : a < x\}$

I – matriz identidade de ordem 2

A^{-1} – matriz inversa da matriz A

Questões

Questão 1. Seja $f\!:\!\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ a função definida por

$$f(x) = 2\text{sen}\ 2x - \cos\ 2x.$$

Então:

A ( ) f é ímpar e periódica de período π.
B ( ) f é par e periódica de período $\pi/2$.
C ( ) f não é par nem ímpar e é periódica de período π.
D ( ) f não é par e é periódica de período $\pi/4$.
E ( ) f não é ímpar e não é periódica.

Questão 2. O valor de

$$\text{tg}^{10}x - 5\text{tg}^8x\sec^2x + 10\text{tg}^6x\sec^4x - 10\text{tg}^4x\sec^6x + 5\text{tg}^2x\sec^8x - \sec^{10}x,$$

para todo $x \in [0, \pi/2[$, é:

A ( ) 1 **B** ( ) $\dfrac{-\sec^2x}{1+\text{sen}^2x}$ **C** ( ) $-\sec x + \text{tg}x$ **D** ( ) -1 **E** ( ) *zero*

Questão 3. Sejam A e B matrizes reais quadradas de ordem 2 que satisfazem a seguinte propriedade: existe uma matriz M inversível tal que

$$A = M^{-1}BM .$$

Então:

A ( ) $\det(-A^t) = \det B$ B ( ) $\det A = -\det B$

C ( ) $\det(2A) = 2\det B$ D ( ) Se $\det B \neq 0$ então $\det(-AB) < 0$

E ( ) $\det(A - I) = -\det(I - B)$

Questão 4. Considere, no plano complexo, um polígono regular cujos vértices são as soluções da equação $z^6 = 1$. A área deste polígono, em unidades de área, é igual a:

A ( ) $\sqrt{3}$ B ( ) 5 C ( ) π D ( ) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ E ( ) 2π

Questão 5. Sejam x e y números reais tais que:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 1 \end{cases}.$$

Então, o número complexo $z = x + iy$ é tal que z^3 e $|z|$ valem, respectivamente:

A ( ) $1 - i$ e $\sqrt[6]{2}$ B ( ) $1 + i$ e $\sqrt[6]{2}$ C ( ) i e 1

D ( ) $-i$ e 1 E ( ) $1 + i$ e $\sqrt[3]{2}$

Questão 6. Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Sobre o lado AC deste triângulo considere um ponto D tal que os segmentos AD, BD e BC são todos congruentes entre si. A medida do ângulo $B\hat{A}C$ é igual a:

A ( ) 23° B ( ) 32° C ( ) 36° D ( ) 40° E ( ) 45°

Questão 7. Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ uma progressão geométrica infinita de razão a_1, $0 < a_1 < 1$, e soma igual a $3a_1$. A soma dos três primeiros termos desta progressão geométrica é:

A ( ) $\frac{8}{27}$ B ( ) $\frac{20}{27}$ C ( ) $\frac{26}{27}$ D ( ) $\frac{30}{27}$ E ( ) $\frac{38}{27}$

Questão 8. O valor de $y \in R$ que satisfaz a igualdade

$$\log_y 49 = \log_{y^2} 7 + \log_{2y} 7 \ ,$$

é:

A ( ) $\frac{1}{2}$ B ( ) $\frac{1}{3}$ C ( ) 3 D ( ) $\frac{1}{8}$ E ( ) 7

Questão 9. O número de anagramas da palavra *VESTIBULANDO*, que não apresentam as cinco vogais juntas, é:

A ( ) 12! **B** ( ) (8!)(5!) **C** ( ) 12! – (8!)(5!) **D** ( ) 12! – 8! **E** ( ) 12! – (7!)(5!)

Questão 10. Uma pirâmide regular tem por base um quadrado de lado 2 cm. Sabe-se que as faces formam com a base ângulos de $45°$. Então, a razão entre a área da base e a área lateral é igual a:

A ( ) $\sqrt{2}$ **B** ( ) $\frac{1}{3}$ **C** ( ) $\sqrt{6}$ **D** ( ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **E** ( ) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

NOTA: RESOLVA AS QUESTÕES NUMERADAS DE 11 A 25 NO CADERNO DE RESPOSTAS. NA FOLHA DE LEITURA ÓPTICA ASSINALE AS ALTERNATIVAS DAS 25 QUESTÕES. AO TERMINAR A PROVA, ENTREGUE AO FISCAL O CADERNO DE RESPOSTAS E A FOLHA DE LEITURA ÓPTICA.

Questão 11. Seja $f: R \to R$ a função definida por

$$f(x) = -\,3a^x,$$

onde a é um número real, $0 < a < 1$. Sobre as afirmações:

(I) $f(x + y) = f(x)\, f(y)$, para todo $x, y \in R$.
(II) f é bijetora.
(III) f é crescente e $f(\,]0, +\infty[\,) =]-3, 0[$.

Podemos concluir que:

A ( ) Todas as afirmações são falsas.
B ( ) Todas as afirmações são verdadeiras.
C ( ) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
D ( ) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
E ( ) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 12. Sejam as funções $f:R \to R$ e $g:A \subset R \to R$, tais que

$$f(x) = x^2 - 9 \qquad \text{e} \qquad (fog)(x) = x - 6,$$

em seus respectivos domínios. Então, o domínio A da função g é:

A ( ) $[-3, +\infty[$

B ( ) R

C ( ) $[-5, +\infty[$

D ( ) $]-\infty, -1[\cup [3, +\infty[$

E ( ) $]-\infty, \sqrt{6}[$

Questão 13. Considere $a, b \in R$ e a equação

$$2e^{3x} + ae^{2x} + 7e^{x} + b = 0.$$

Sabendo que as três raízes reais x_1, x_2, x_3 desta equação formam, nesta ordem, uma progressão aritmética cuja soma é igual a zero, então $a - b$ vale:

A ( ) 5 **B** ( ) -7 **C** ( ) -9 **D** ( ) -5 **E** ( ) 9

Questão 14. Seja a um número real tal que o polinômio

$$p(x) = x^6 + 2x^5 + ax^4 - ax^2 - 2x - 1$$

admite apenas raízes reais. Então:

A ( ) $a \in [2, \infty[$ **B** ( ) $a \in [-1,1]$ **C** ( ) $a \in]-\infty, -7]$

D ( ) $a \in [-2, -1[$ **E** ( ) $a \in]1,2[$

Questão 15. Seja $p(x)$ um polinômio de grau 4 com coeficientes reais. Na divisão de $p(x)$ por $x - 2$ obtém-se um quociente $q(x)$ e resto igual a 26. Na divisão de $p(x)$ por $x^2 + x - 1$ obtém-se um quociente $h(x)$ e resto $8x - 5$. Sabe-se que $q(0) = 13$ e $q(1) = 26$. Então, $h(2) + h(3)$ é igual a:

A ( ) 16 **B** ( ) *zero* **C** ( ) -47 **D** ( ) -28 **E** ( ) 1

Questão 16. Sejam $a,b \in R$. Considere os sistemas lineares em x, y e z:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y + z = 1 \\ -2y + z = a \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x - by + 3z = 0 . \end{cases}$$

Se ambos admitem infinitas soluções reais, então:

A ( ) $\frac{a}{b} = 11$ **B** ( ) $\frac{b}{a} = 22$ **C** ( ) $ab = \frac{1}{4}$

D ( ) $ab = 22$ **E** ( ) $ab = 0$

Questão 17. Sejam as matrizes reais de ordem 2,

$$A = \begin{bmatrix} 2+a & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 2+a \end{bmatrix}.$$

Então, a soma dos elementos da diagonal principal de $(AB)^{-1}$ é igual a:

A ( ) $a+1$ **B** ( ) $4(a+1)$ **C** ( ) $\frac{1}{4}\left(5 + 2a + a^2\right)$

D ( ) $\frac{1}{4}\left(1 + 2a + a^2\right)$ **E** ( ) $\frac{1}{2}\left(5 + 2a + a^2\right)$

Questão 18. A inequação

$$4x \log_5 (x+3) \geq (x^2+3) \log_{\frac{1}{5}} (x+3)$$

é satisfeita para todo $x \in S$. Então:

A ( ) $S =]-3,-2] \cup [-1,+\infty[$

B ( ) $S =]-\infty,-3[\cup [-1,+\infty[$

C ( ) $S =]-3,-1]$

D ( ) $S =]-2,+\infty]$

E ( ) $S =]-\infty,-3[\cup]-3,+\infty[$

Questão 19. A soma das raízes da equação

$$\sqrt{3}\,\text{tg}\,x - \sqrt{3}\,\text{sen}\,2x + \cos 2x = 0,$$

que pertencem ao intervalo $[0, 2\pi]$, é:

A ( ) $\frac{17\pi}{4}$ **B** ( ) $\frac{16\pi}{3}$ **C** ( ) $\frac{15\pi}{4}$ **D** ( ) $\frac{14\pi}{3}$ **E** ( ) $\frac{13\pi}{4}$

Questão 20. Considere as afirmações sobre polígonos convexos:

(I) Existe apenas um polígono cujo número de diagonais coincide com o número de lados.
(II) Não existe polígono cujo número de diagonais seja o quádruplo do número de lados.
(III) Se a razão entre o número de diagonais e o de lados de um polígono é um número natural, então o número de lados do polígono é ímpar.

Então:

A ( ) Todas as afirmações são verdadeiras.
B ( ) Apenas (I) e (III) são verdadeiras.
C ( ) Apenas (I) é verdadeira.
D ( ) Apenas (III) é verdadeira.
E ( ) Apenas (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 21. As retas $y = 0$ e $4x + 3y + 7 = 0$ são retas suportes das diagonais de um paralelogramo. Sabendo que estas diagonais medem 4cm e 6cm, então, a área deste paralelogramo, em cm^2, vale:

A ( ) $\frac{36}{5}$ **B** ( ) $\frac{27}{4}$ **C** ( ) $\frac{44}{3}$ **D** ( ) $\frac{48}{3}$ **E** ( ) $\frac{48}{5}$

Questão 22. Um poliedro convexo de 16 arestas é formado por faces triangulares e quadrangulares. Seccionando-o por um plano convenientemente escolhido, dele se destaca um novo poliedro convexo, que possui apenas faces quadrangulares. Este novo poliedro possui um vértice a menos que o original e uma face a mais que o número de faces quadrangulares do original. Sendo m e n, respectivamente, o número de faces e o número de vértices do poliedro original, então:

A ( ) $m = 9, n = 7$ **B** ( ) $m = n = 9$ **C** ( ) $m = 8, n = 10$

D ( ) $m = 10, n = 8$ **E** ( ) $m = 7, n = 9$

Questão 23. Considere um cone circular reto cuja geratriz mede $\sqrt{5}$ cm e o diâmetro da base mede 2 cm. Traçam-se n planos paralelos à base do cone, que o seccionam determinando $n+1$ cones, incluindo o original, de modo que a razão entre os volumes do cone maior e do cone menor é 2. Os volumes destes cones formam uma progressão aritmética crescente cuja soma é igual a 2π. Então, o volume, em cm^3, do tronco de cone determinado por dois planos consecutivos é igual a:

A ( ) $\frac{\pi}{33}$ **B** ( ) $\frac{2\pi}{33}$ **C** ( ) $\frac{\pi}{9}$ **D** ( ) $\frac{2\pi}{15}$ **E** ( ) π

Questão 24. Considere a hipérbole H e a parábola T, cujas equações são, respectivamente,

$$5(x+3)^2 - 4(y-2)^2 = -20 \quad \text{e} \quad (y-3)^2 = 4(x-1).$$

Então, o lugar geométrico dos pontos P, cuja soma dos quadrados das distâncias de P a cada um dos focos da hipérbole H é igual ao triplo do quadrado da distância de P ao vértice da parábola T, é:

A ( ) A elipse de equação $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1$.

B ( ) A hipérbole de equação $\frac{(y+1)^2}{5} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1$.

C ( ) O par de retas dadas por $y = \pm(3x-1)$.

D ( ) A parábola de equação $y^2 = 4x + 4$.

E ( ) A circunferência centrada em $(9, 5)$ e raio $\sqrt{120}$.

Questão 25. Considere o paralelogramo $ABCD$ onde $A = (0, 0)$, $B = (-1, 2)$ e $C = (-3, -4)$. Os ângulos internos distintos e o vértice D deste paralelogramo são, respectivamente:

A ( ) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ e $D = (-2, -5)$

B ( ) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ e $D = (-1, -5)$

C ( ) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ e $D = (-2, -6)$

D ( ) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ e $D = (-2, -6)$

E ( ) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ e $D = (-2, -5)$