PRINCIPAIS NOTAÇÕES

$\mathbb{R}$ = conjunto dos números reais;

$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$

$\mathbb{N}$ = conjunto dos inteiros positivos

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$

$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}$

$]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R};\ x > a\}$

$\binom{n}{k}$ = combinação de n elementos tomados k a k

$\log_a(b)$ = logaritmo de b na base a

$f \circ g$ = função composta de f com g

i = unidade imaginária $\left(i = \sqrt{-1}\right)$

A^c = conjunto complementar de A

A^t = transposta da matriz A

$\det A$ = determinante da matriz A

$A^2 = A\,A$

(a, b) é o par ordenado

1. Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$ e considere a matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} \log_a(3a) & \log_{10}(3a)^2 \\ \log_a\left(\frac{1}{a}\right) & -\log_a(a) \\ \log_a(1) & \log_{10}(1) \end{bmatrix}$$

Para que a característica de **A** seja máxima, o valor de **a** deve ser tal que:

(A) $a \neq 10$ e $a \neq \frac{1}{3}$

(B) $a \neq \sqrt{10}$ e $a \neq \frac{1}{3}$

(C) $a \neq 5$ e $a \neq 10$

(D) $a \neq 2$ e $a \neq \sqrt{3}$

(E) $a \neq 2$ e $a \neq \sqrt{10}$

2. Sejam A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, e considere as seguintes afirmações:

I. $(A - B)^c \cap (B \cup A^c)^c = \varnothing$

II. $(A - B^c)^c = B - A^c$

III. $[(A^c - B) \cup (B - A)]^c = A$

Sobre essas afirmações podemos garantir que:

(A) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

(B) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

(C) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

(D) todas as afirmações são verdadeiras.

(E) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

3. Numa pirâmide triangular regular, a área da base é igual ao quadrado da altura **H**. Seja **R** o raio da esfera inscrita nesta pirâmide. Deste modo, a razão $\frac{H}{R}$ é igual a:

(A) $\sqrt{\sqrt{3}+1}$

(B) $\sqrt{\sqrt{3}-1}$

(C) $1 + \sqrt{3\sqrt{3}+1}$

(D) $1 + \sqrt{3\sqrt{3}-1}$

(E) $\sqrt{3} + 1$

4. Dadas as afirmações:

I. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n,\ n \in \mathbb{N}$

II. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},\ n \in \mathbb{N},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n$

III. Existem mais possibilidades de escolher 44 números diferentes entre os números inteiros de 1 a 50 do que escolher 6 números diferentes entre os inteiros de 1 a 50.

Conclui-se que:

(A) todas são verdadeiras.

(B) apenas (I) e (II) são verdadeiras.

(C) apenas (I) é verdadeira.

(D) apenas (II) é verdadeira.

(E) apenas (II) e (III) são verdadeiras.

5. Considere o polinômio $p(z) = z^6 + 2z^5 + 6z^4 + 12z^3 + 8z^2 + 16z$.

Sobre as raízes da equação $p(z) = 0$, podemos afirmar que:

(A) apenas uma é real.

(B) apenas duas raízes são reais e distintas.

(C) apenas duas raízes são reais e iguais.

(D) quatro raízes são reais, sendo duas a duas distintas.

(E) quatro raízes são reais, sendo apenas duas iguais.

6. Seja **a** $\in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ um número real dado. A solução (x_0, y_0) do sistema de equações

$$\begin{cases} (\operatorname{sen} a)x - (\cos a)y = -\operatorname{tg} a \\ (\cos a)x + (\operatorname{sen} a)x = -1 \end{cases},$$

é tal que:

(A) $x_0 \cdot y_0 = \operatorname{tg} a$

(B) $x_0 \cdot y_0 = -\sec a$

(C) $x_0 \cdot y_0 = 0$

(D) $x_0 \cdot y_0 = \operatorname{sen}^2 a$

(E) $x_0 \cdot y_0 = \operatorname{sen} a$

7. Seja $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ uma função injetora tal que $f(1) = 0$ e $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ para todo x > 0 e y > 0. Se x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 formam nessa ordem uma progressão geométrica, onde x_i > 0 para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ e sabendo que $\sum_{i=1}^{5} f(x_i) = 13\ f(2) + 2\ f(x_1)$ e $\sum_{i=1}^{4} f\left(\frac{x_i}{x_i + 1}\right) = -2f(2x_1)$, então, o valor de x_1 é:

(A) -2 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 1

8. Um hexágono regular e um quadrado estão inscritos no mesmo círculo de raio **R** e o hexágono possui uma aresta paralela a uma aresta do quadrado. A distância entre estas arestas paralelas será:

(A) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$ R

(B) $\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$ R

(C) $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$ R

(D) $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$ R

(E) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ R

9. Tangenciando externamente a elipse ε_1, tal que $\varepsilon_1 : 9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 = 0$, considere uma elipse ε_2, de eixo maior sobre a reta que suporta o eixo menor de ε_1 e cujos eixos têm a mesma medida que os eixos de ε_1. Sabendo que ε_2 está inteiramente contida no primeiro quadrante, o centro de ε_2 é:

(A) (7, 3)
(B) (8, 2)
(C) (8, 3)
(D) (9, 3)
(E) (9, 2)

10. São dadas as parábolas $p_1 : y = -x^2 - 4x - 1$ e $p_2 : y = x^2 - 3x + \frac{11}{4}$ cujos vértices são denotados, respectivamente, por V_1 e V_2. Sabendo que **r** é a reta que contém V_1 e V_2, então a distância de **r** até à origem é:

(A) $\frac{5}{\sqrt{26}}$
(B) $\frac{7}{\sqrt{26}}$
(C) $\frac{7}{\sqrt{50}}$
(D) $\frac{17}{\sqrt{50}}$
(E) $\frac{11}{\sqrt{74}}$

11. Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Para que

$$]4,5[= \left\{ x \in \mathbb{R}_+^*;\ \log_{\frac{1}{a}}(\log_a(x^2 - 15)) > 0 \right\},$$

o valor de **a** é:

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 9 (E) 10

12. Se (x_0, y_0) é uma solução real do sistema

$$\begin{cases} \log_2(x + 2y) - \log_3(x - 2y) = 2 \\ x^2 - 4y^2 = 4 \end{cases}$$

então $x_0 + y_0$ é igual a:

(A) $\frac{7}{4}$ (B) $\frac{9}{4}$ (C) $\frac{11}{4}$ (D) $\frac{13}{4}$ (E) $\frac{17}{4}$

13. Considere **A** e **B** matrizes reais 2×2, arbitrárias. Das afirmações a seguir assinale a verdadeira. Justifique a afirmação verdadeira e dê exemplo para mostrar que cada uma das demais é falsa.

(A) Se **A** é não nula então **A** possui inversa.

(B) $(\mathbf{A}\mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t\,\mathbf{B}^t$

(C) $\det(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B}\mathbf{A})$

(D) $\det \mathbf{A}^2 = 2\det \mathbf{A}$

(E) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$

14. Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere as matrizes reais 2×2,

$$A = \begin{bmatrix} 3^a & -1 \\ -1 & 3^a \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 7^{a-1} & 8^{a-3} \\ 7 & 2^{-3} \end{bmatrix}$$

O produto **AB** será inversível se e somente se:

(A) $a^2 - 5a + 6 \neq 0$

(B) $a^2 - 5a \neq 0$

(C) $a^2 - 3a \neq 0$

(D) $a^2 - 2a + 1 \neq 0$

(E) $a^2 - 2a \neq 0$

15. Seja α um número real tal que $\alpha > 2(1+\sqrt{2})$ e considere a equação $x^2 - \alpha x + \alpha + 1 = 0$. Sabendo que as raízes reais dessa equação são as cotangentes de dois dos ângulos internos de um triângulo, então o terceiro ângulo interno desse triângulo vale:

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 135° (E) 120°

16. Seja $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tal que $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = m$. Então, o valor de $y = \dfrac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen}^3\alpha + \cos^3\alpha}$ será:

(A) $\dfrac{2(m^2-1)}{m(4-m^2)}$

(B) $\dfrac{2(m^2+1)}{m(4+m^2)}$

(C) $\dfrac{2(m^2-1)}{m(3-m^2)}$

(D) $\dfrac{2(m^2-1)}{m(3+m^2)}$

(E) $\dfrac{2(m^2+1)}{m(3-m^2)}$

17. A aresta de um cubo mede **x** cm. A razão entre o volume e a área total do poliedro cujos vértices são os centros das faces do cubo será:

(A) $\frac{\sqrt{3}}{9}$x cm

(B) $\frac{\sqrt{3}}{18}$x cm

(C) $\frac{\sqrt{3}}{6}$x cm

(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$x cm

(E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$x cm

18. As dimensões x, y, z de um paralelepípedo retângulo estão em progressão aritmética. Sabendo que a soma dessas medidas é igual a 33 cm e que a área total do paralelepípedo é igual a 694 cm^2, então o volume deste paralelepípedo, em cm^3, é igual:

(A) 1.200

(B) 936

(C) 1.155

(D) 728

(E) 834

19. Três pessoas, **A**, **B**, **C**, chegam no mesmo dia a uma cidade onde há cinco hotéis H_1, H_2, H_3, H_4 e H_5. Sabendo que cada hotel tem pelo menos três vagas, qual/quais das seguintes afirmações, referentes à distribuição das três pessoas nos cinco hotéis, é/são corretas?

I. Existe um total de 120 combinações.

II. Existe um total de 60 combinações se cada pessoa pernoitar num hotel diferente.

III. Existe um total de 60 combinações se duas e apenas duas pessoas pernoitarem no mesmo hotel.

(A) Todas as afirmações são verdadeiras.

(B) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

(C) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

(D) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

(E) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

20. O valor da potência $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{93}$ é:

(A) $\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$

(B) $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

(C) $\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}$

(D) $\left(\sqrt{2}\right)^{93} i$

(E) $\left(\sqrt{2}\right)^{93} + i$

21. Sejam a_1, a_2, a_3, a_4 quatro números reais $(\text{com } a_1 \neq 0)$, formando nessa ordem uma progressão geométrica. Então, o sistema em x e y

$$\begin{cases} a_1x + a_3y = 1 \\ a_1 a_2 x + a_1 a_4 y = a_2 \end{cases}$$

é um sistema

(A) impossível.

(B) possível determinado.

(C) possível indeterminado.

(D) possível determinado apenas para $a_1 > 1$.

(E) possível determinado apenas para $a_1 < -1$.

22. Considere as funções reais **f** e **g** definidas por

$$f(x) = \frac{1+2x}{1-x^2},\ \ x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\} \text{ e } g(x) = \frac{x}{1+2x},\ \ x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}.$$

O maior subconjunto de $\mathbb{R}$ onde pode ser definida a composta f o g, tal que (f o g)(x) < 0, é:

(A) $\left]-1, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right[$

(B) $]-\infty, -1[\cup \left]-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right[$

(C) $]-\infty, -1[\cup \left]-\frac{1}{2}, 1\right[$

(D) $]1, \infty[$

(E) $\left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right[$

23. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 3, & x \le 0 \\ x^2 + 4x + 3, & x > 0 \end{cases}$$

Então:

(A) f é bijetora e $(f \circ f)(-\frac{2}{3}) = f^{-1}(21)$.

(B) f é bijetora e $(f \circ f)(-\frac{2}{3}) = f^{-1}(99)$.

(C) f é sobrejetora, mas não é injetora.

(D) f é injetora, mas não é sobrejetora.

(E) f é bijetora e $(f \circ f)(-\frac{2}{3}) = f^{-1}(3)$.

24. Sabendo que o ponto (2, 1) é o ponto médio de uma corda AB da circunferência $(x-1)^2 + y^2 = 4$, então a equação da reta que contém A e B é dada por:

(A) $y = 2x - 3$
(B) $y = x - 1$
(C) $y = -x + 3$
(D) $y = \frac{3}{2}x - 2$
(E) $y = -\frac{1}{2}x + 2$

25. São dadas as retas r: $x - y + 1 + \sqrt{2} = 0$ e s: $\sqrt{3}x + y - 2 + \sqrt{3} = 0$ e a circunferência C: $x^2 + 2x + y^2 = 0$.

Sobre a posição relativa desses três elementos, podemos afirmar que:

(A) r e s são paralelas entre si e ambas são tangentes à C.

(B) r e s são perpendiculares entre si e nenhuma delas é tangente à C.

(C) r e s são concorrentes, r é tangente à C e s não é tangente à C.

(D) r e s são concorrentes, s é tangente à C e r não é tangente à C.

(E) r e s são concorrentes e ambas são tangentes à C.

Gabarito

1.	B	**14.**	E
2.	A	**15.**	D
3.	C	**16.**	C
4.	B	**17.**	B
5.	B	**18.**	C
6.	C	**19.**	E
7.	B	**20.**	A
8.	A	**21.**	C
9.	D	**22.**	A
10.	E	**23.**	B
11.	E	**24.**	C
12.	D	**25.**	E
13.	C		