MINISTÉRIO DA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE PESQUISAS E DESENVOLVIMENTO
CENTRO TÉCNICO AEROESPACIAL
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

CONCURSO DE ADMISSÃO - 1976

EXAME DE MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES

1. A duração da prova é de 3 horas.
2. A prova de Matemática consta de 25 questões de Múltipla-Escolha.
3. O caderno de questões contém 5 páginas.
4. Só há uma resposta certa para cada questão.
5. N.D.R.A. significa "nenhuma das respostas anteriores"
6. Na FOLHA DE RESPOSTA não deixe de responder nenhuma questão; assinale com um simples traço, em cada questão, o espaço correspondente à resposta que lhe parecer mais correta.
7. Observe cuidadosamente o nº das questões ao respondê-las.
8. Seja cauteloso ao transportar as respostas da FOLHA para o CARTÃO DE RESPOSTAS.
9. Assinale no CARTÃO DE RESPOSTAS com um traço curto e forte de lápis, o espaço correspondente à sua resposta para cada questão.
10. Se você cometer algum engano no CARTÃO DE RESPOSTAS, use borracha. Neste caso, tome cuidado para evitar rasuras, dobras, etc.
11. O agente fiscal fornecerá papel para rascunho, o qual não será considerado na correção da prova.
12. Não será permitido o uso de tabelas, régua de cálculo, máquina de calcular, apontamentos, formulários e outros papéis, a não ser os fornecidos pelo fiscal.
13. Lidas as presentes instruções e preenchido o cabeçalho da FOLHA DE RESPOSTAS, aguarde ordem do fiscal para iniciar o exame.

BOA SORTE !

1. Considere $g : \{a,b,c\} \to \{a,b,c\}$ uma função tal que

$$g(a) = b \quad e \quad g(b) = a \ .$$

Então, temos:

(A) a equação $g(x) = x$ tem solução se, e somente se, g é injetora

(B) g é injetora, mas não é sobrejetora

(C) g é sobrejetora, mas não é injetora

(D) se g não é sobrejetora, então $g(g(x)) = x$ para todo x em $\{a,b,c\}$

(E) N.D.R.A.

2. Sejam A e B conjuntos infinitos de números naturais.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são funções tais que $f(g(x)) = x$, para todo x em B e $g(f(x)) = x$, para todo x em A, então, temos:

(A) existe x_o em B, tal que $f(y) = x_o$, para todo y em A

(B) existe a função inversa de f

(C) existem x_o e x_1 em A, tais que $x_o \neq x_1$ e $f(x_o) = f(x_1)$

(D) existe a em B, tal que $g(f(g(a))) \neq g(a)$

(E) N.D.R.A.

3. Suponhamos que $z_1 = a + xi$ e $z_2 = a + yi$, $a \neq 0$, $x \neq 0$ são dois números complexos, tais que $z_1 . z_2 = 2$. Então temos:

(Obs.: $\bar{z}$ indica conjugado de z)

(A) $z_1 = \bar{z}_2$ e $|z_1| = |z_2| = 2$

(B) $z_1 = z_2$ e $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$

(C) $z_1 = \bar{z}_2$ e $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$

(D) $z_1 + z_2 = 2a$ e $a^2 + y^2 = 4$

(E) N.D.R.A.

4. As raizes de ordem 4 do número $z = e^{\frac{\Pi i}{2}}$, onde i é a unidade imaginária, são:

(A) $z_k = \cos\theta_k + i\ \mathrm{sen}\theta_k$, onde $\theta_k = \frac{1 + 4k}{8}.\Pi$, com $k = 0,1,2,3.$

(B) $z_k = e^{i\theta_k}$, onde $\theta_k = \frac{1 + 3k}{8}\Pi$, com $k = 0,1,2,3.$

(C) $z_k = e^{i\theta_k}$, onde $\theta_k = 4k\Pi$, com $k = 0,1,2,3.$

(D) $z_k = e^{i\theta_k}$, onde $\theta_k = \frac{1 - 4k}{8}.\Pi$, com $k = 0,1,2,3.$

(E) N.D.R.A.

5. Os valores reais a e b, tais que os polinômios

$x^3 - 2ax^2 + (3a + b)x - 3b$ e $x^3 - (a + 2b)x + 2a$

sejam divisíveis por $x + 1$, são :

(A) dois números inteiros positivos.

(B) dois números inteiros negativos.

(C) números inteiros, sendo que um é positivo e o outro negativo.

(D) dois números reais, sendo um racional e o outro irracional.

(E) N.D.R.A.

6. Se designarmos por S_n a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de infinitos termos, de razão $q > 1$ e primeiro termo $a_1 > 0$, podemos afirmar que:

(A) $\frac{S_n}{S_{2n} - S_n} = \frac{S_{2n} - S_n}{S_{3n} - S_{2n}}$; (B) $\frac{S_n}{S_{2n} - S_n} = \frac{S_{2n}}{S_{3n} - S_{2n}}$

(C) $\frac{S_n}{S_{2n} - S_n} = S_{3n} - S_n$; (D) $S_{3n} = S_{2n} + S_n$

(E) N.D.R.A.

7. Dado um paralelepípedo retângulo, de volume V, cujas arestas estão em progressão geométrica, de razão q, podemos garantir que sua área total é dada por

(A) $\dfrac{2\,V^{\frac{2}{3}}}{q}\,(q^2 + q + 1)$; (B) $\dfrac{V^{\frac{2}{3}}}{q}\,(q^2 + q - 1)$

(C) $\dfrac{V^{\frac{2}{3}}}{q+1}\,(q^2 + q + 1)$; (D) $\dfrac{V^2}{q^3}\,(q + 1)$

(E) N.D.R.A.

8. Numa superfície esférica de área $A > 1$, considere inscrito um cone, tal que a área de sua base seja igual à sua altura.
Nestas condições, temos que o volume do cone é dado por :

(A) $V = \frac{1}{3}\,\Pi^2\,A^{\frac{3}{2}}$; (B) $V = \frac{1}{3}\,\Pi\,A^2$

(C) $V = \frac{1}{3}\left(\dfrac{\sqrt{\Pi\,A} - 1}{\Pi}\right)^2$; (D) $V = \frac{1}{3}\,\Pi\left(A^{\frac{3}{2}} - 1\right)$

(E) N.D.R.A.

9. Considere um tetraedro regular circunscrito a uma esfera de raio R . Designando por H, a, h e V, respectivamente, a altura, a aresta, a altura da base e o volume desse tetraedro, temos :

(A) $V = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,R^3$ e $h = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}\,H$; (B) $V = 8\sqrt{3}\,R^3$ e $a = \dfrac{\sqrt{6}}{2}\,H$

(C) $V = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}\,R^3$ e $H = 4\,R$; (D) $V = 6\sqrt{2}\,R^3$ e $H = 4\,R$

(E) N.D.R.A.

10. Seja A uma função real de variável real x, tal que :

$$e^{2x} - 2e^{x}.A(x) + 1 = 0 ,$$

para todo número real x. Nestas condições, temos :

(A) $A(0) = 1$, $A(x) = A(-x)$, para todo número real x e não existe um número real $x \neq 0$, satisfazendo a relação $A(x) = 1$.

(B) $A(0) = 1$ e $A(x) = 0$, para algum número real x.

(C) $A(1) < 0$ e $A(x) = A(-x)$, para todo número real x.

(D) não existe um número real x, não nulo, satisfazendo a relação $A(x) = 1$ e não existe um número real x, satisfazendo $A(x) = A(-x)$.

(E) N.D.R.A.

11. Considere a seguinte função real de variável real

$$M(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{-x} + e^{x}}$$

Então:

(A) Para todo $x > 1$, ocorre : $M(x) > 1$

(B) Para todo número real x ocorrem, simultaneamente,

$$M(-x) = - M(x) \quad e \quad 0 \leq M(x) < 1$$

(C) Existem: um a (número real positivo) e um b (número real negativo), tais que: $M(a) < M(b)$

(D) $M(x) = 0$, somente quando $x = 0$ e $M(x) > 0$ apenas quando $x < 0$.

(E) N.D.R.A.

12. No sistema decimal, quantos números de cinco algarismos (sem repetição) podemos escrever, de modo que os algarismos 0 (zero), 2 (dois) e 4 (quatro) apareçam agrupados ?

Obs.: Considerar somente números de 5 algarismos em que o primeiro algarismo é diferente de zero.

(A) $2^4 . 3^2 . 5$; (B) $2^5 . 3 . 7$

(C) $2^4 . 3^3$; (D) $2^5 . 3^2$; (E) N.D.R.A.

13. Em relação à equação $x^{\log_4 \sqrt{x}} = x^{\log_4 x} - 2$, $x > 0$, temos :

(A) admite apenas uma raiz, a qual é um número inteiro positivo.

(B) não admite uma raiz inteira satisfazendo a relação $0 < x < 35$.

(C) todas as suas raizes são números irracionais.

(D) admite uma raiz inteira x_1 e admite uma raiz fracionaria x_2, tais que :

$$x_1^3 + x_2^3 = \frac{4097}{64} .$$

(E) N.D.R.A.

14. Seja Q uma matriz 4 x 4, tal que

$$\det Q \neq 0 \quad \text{e} \quad Q^3 + 2\,Q^2 = 0 .$$

Então, temos :
(det Q indica determinante de Q)

(A) $\det Q = 2$; (B) $\det Q = -2$; (C) $\det Q = -16$;

(D) $\det Q = 16$; (E) N.D.R.A.

15. Se $P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ é matriz 3 x 3, então

uma solução da equação

$$(P + X)^2 = P^2 + X^2 + 2\,PX \text{ é}$$

(A) $X = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$; (B) $X = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

(C) $X = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$; (D) $X = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

(E) N.D.R.A.

16. Considere a matriz 3 x 3

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

Sabendo que

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

então, temos:

(A) det M é um número positivo.

(B) Existe uma matriz P, 3 x 3, tal que:

$$MP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

(C) $M_{21} = - 3M_{22} - 2M_{23}$.

(D) se $M_{21} = 3M_{22} + 2M_{23}$, então $M_{21} \neq 0$.

(E) N.D.R.A.

17. A inequação $4 \operatorname{sen}^2 x - 2(1 + \sqrt{2}) \operatorname{sen} x + \sqrt{2} < 0$ tem uma solução x , tal que :

(A) $45^\circ < x < 60^\circ$; (B) $0^\circ < x < 30^\circ$

(C) $35^\circ < x < 45^\circ$; (D) $60^\circ < x < 75^\circ$

(E) N.D.R.A.

18. Resolvendo a equação

$$3\ sen^2\ (e^x) - 2\sqrt{3}\ .\ sen(e^x).cos(e^x) - 3\ cos^2(e^x) = 0$$

obtemos :

(A) $e^x = k\Pi \pm \frac{\Pi}{4}$, $k = 0,1,2,3,\ldots$.

(B) $x = \log_e(2k\Pi \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\Pi)$, $k = 0,1,2,\ldots$.

(C) $e^x = k\Pi + \frac{\Pi}{3}$, $k = 0,1,2,3,\ldots$.

(D) $x = \log_e(\frac{k}{2}\Pi - \frac{\Pi}{6})$, $k = 1,2,3,\ldots$.

(E) N.D.R.A.

19. A respeito do produto

$$P = \left(sen(bx) + cosec(bx)\right)\left(cos(bx) + sec(bx)\right)\left(tg(bx)+cotg(bx)\right)$$

podemos afirmar que :

(A) P é positivo, para todo x real e $b > 0$.

(B) P pode ser negativo ou positivo, dependendo da escolha de x e b em R .

(C) P é negativo para $x = k\Pi$ e $b < 0$ ou P é positivo para $x = k\Pi$ e $b > 0$, quando $k = 1,2,\ldots$.

(D) P é positivo, quando $bx \neq \frac{k}{2}\Pi$, para todo $k = 0, \pm 1, \pm 2,\ldots$.

(E) N.D.R.A.

20. A soma dos quadrados das raizes da equação

$$x^3 + \sqrt{5}\,x^2 + 2\sqrt{3}\,x + 8 = 0$$

é igual a :

(A) 5 ;

(B) $5 - 4\sqrt{3}$.

(C) $12.\sqrt{5}$;

(D) $9 + \sqrt{5} + 2\sqrt{3}$.

(E) N.D.R.A.

21. Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, considere P_1 a circunferência de equação

$$2x^2 + 2y^2 - 11x + 6y - 8 = 0$$

Então, a equaçao da circunferência que é tangente ao eixo das abscissas e com o mesmo centro de P_1 é dada por :

(A) $(x + \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{11}{4})^2 = \frac{4}{9}$.

(B) $(x + \frac{4}{11})^2 + (y - 2)^2 = \frac{2}{3}$.

(C) $(x - \frac{11}{4})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$.

(D) $2x^2 + 2y^2 - 11x + 6y - \frac{1}{8} = 0$; (E) N.D.R.A.

22. Em que intervalo estão as raizes reais da equação

$$x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 6x - 9 = 0 \quad ?$$

(A) $[150 ; 200]$; (B) $[-14 ; -12]$

(C) $[12 ; 13]$; (D) $[- 10 ; 10]$

(E) N.D.R.A.

23. A equação $4x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = 0$ admite uma raiz igual a i (unidade imaginária). Deduzimos, então, que

(A) tal equação não admite raiz real, menor que 2 .

(B) tal equação admite como raiz, um número racional .

(C) tal equação não admite como raiz, um número positivo .

(D) tal equação não possui raiz da forma bi, com b < 1 .

(E) N.D.R.A.

24. Considere as equações

$$x^2 + y^2 = axy \qquad (I)$$

$$x^4 + y^4 = bx^2 y^2 \qquad (II)$$

com a e b constantes reais e assuma que $P = a^2 - (b + 2)$.

Nestas condições, temos:

(A) Para todos a e b reais, satisfazendo a relação $P = 0$, existe uma solução de (I) que não é solução de (II).

(B) Para todo a e b reais, satisfazendo a relação $P = 0$, ocorre : qualquer solução de (I) é também solução de (II).

(C) Para todos a e b reais, satisfazendo a relação $P = 0$, apenas o par $(x,y) = (0,0)$ é solução, simultaneamente, de (I) e (II).

(D) Para todos a e b reais, satisfazendo a relação $P \neq 0$, o par $(x,y) = (1 + \sqrt{\pi}\ ,\ 1 - \sqrt{\pi}\ )$ é solução, simultaneamente, de (I) e (II).

(E) N.D.R.A.

25. Suponha que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais positivos, com $n \geq 2$ e que $a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n = 4$.

Nesta situação, a respeito do produto

$$P = (1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \ ,$$

temos :

(A) $P \geq 2^{n+3}$; (B) $P \geq 5^n$

(C) $P \geq 2^{n+1}$; (D) $P \geq 5^{n+1}$

(E) N.D.R.A.