MINISTÉRIO DA AERONÁUTICA
CENTRO TÉCNICO AEROESPACIAL
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

CONCURSO DE ADMISSÃO - 1973

EXAME DE MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES

1. A duração da prova é de 4 horas.
2. A prova de Matemática constá de 25 questões de Múltipla Escôlha.
3. Só há uma resposta certa em cada questão.
4. NÃO DEIXE DE RESPONDER NENHUMA QUESTÃO. QUANDO EM DÚVIDA, ASSINALE A RESPOSTA QUE LHE PARECER MAIS CORRETA.
5. Questões não respondidas ocasionam rejeição do cartão pelo computador, podendo prejudicar o candidato.
6. Não escreva no caderno de questões.
7. Assinale com um traço curto e forte de lápis o espaço correspondente a cada questão, na fôlha de respostas.
8. Verificando algum engano na resposta poderá corrigí-la usando borracha.
9. Observe cuidadosamente o número das questões ao respondê-las.
10. O agente fiscal fornecerá papel para rascunho, o qual não será considerado na correção da prova.
11. Não será permitido o uso de tabelas, régua de cálculo, apontamentos, formulários e outros papéis a não ser os fornecidos pelo fiscal.
12. O caderno de questões contém 9 páginas numeradas de 2 a 10.
13. LIDAS AS PRESENTES INSTRUÇÕES E PREENCHIDO O CABEÇALHO DA FÔLHA DE RESPOSTAS AGUARDE ORDEM DO FISCAL PARA INICIAR O EXAME.

QUESTÕES DE MÚLTIPLA-ESCÔLHA

1. Sabe-se que a média harmônica entre o raio e a altura de um cilindro de revolução vale 4. Quanto valerá a relação do volume para a área total dêste cilindro?

   a) 1

   b) 2

   c) 2,5

   d) 3

   e) n.d.a.

2. O crescimento de uma certa cultura de bactérias obedece a função $X(t) = Ce^{kt}$, onde $X(t)$ é o número de bactérias no tempo $t \geq 0$; C,k são constantes positivas, (e é a base do logarítmo neperiano). Verificando-se que o número inicial de bactérias $X(\bar{0})$, duplica em 4 horas, quantas se pode esperar no fim de 6 horas?

   a) 3 vezes o número inicial

   b) 2,5 vezes o número inicial

   c) $2\sqrt{2}$ vezes o número inicial

   d) $2\sqrt[3]{2}$ vezes o número inicial

   e) n.d.a.

3. Um navio, navegando em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos A, B, C. O comandante quando o navio está em A, observa um farol em L, e calcula o ângulo $L\hat{A}C = 30^{o}$. Após navegar 4 milhas até B, verifica o ângulo $L\hat{B}C = 75^{o}$. Quantas milhas separa o farol do ponto B?

   a) 4

   b) $2\sqrt{2}$

   c) 8/3

   d) $\sqrt{2}/2$

   e) n.d.a.

4. Consideremos um cone de revolução de altura h, e um cilindro nê-le inscrito. Seja d a distância do vértice do cone à base superior do cilindro. A altura H de um segundo cilindro inscrito neste cone (diferente do primeiro) e de mesmo volume do primeiro é dada por:

a) $H = (h - \sqrt{h - d})/3$

b) $H = (h \pm \sqrt{h^2 - d^2})/3$

c) $H = (h - d + h\sqrt{h^2 - d^2})/2$

d) $H = (h + d - \sqrt{(h-d)(h+3d)})/2$

e) n.d.a.

5. O coeficiente de $a^{n+1-p}b^p$ no produto de

$a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \ldots + \binom{k}{p}a^{k-p}b^p + \ldots + b^k$ por $(a+b)$, se $k = n$,

vale:

a) $\binom{n}{p}$

b) $\binom{n+1}{p}$

c) $\binom{n-1}{p}$

d) $\binom{n+1}{p+1}$

e) n.d.a.

6. A desigualdade $\sqrt[x-3]{x} \cdot \sqrt{x} \leq \frac{1}{x}$ é válida para

a) qualquer x positivo

b) $1 \leq x < 3$

c) $0 < x \leq 1$ ou $2 \leq x \leq 3$

d) $0 < x \leq 1$ ou $2 \leq x < 3$

e) n.d.a.

7. Suponhamos que p e q são os catetos de um triângulo retângulo e h a altura relativa à hipotenusa do mesmo. Nestas condições, podemos afirmar que a equação:

$$\frac{2}{p}x^2 - \frac{2}{h}x + \frac{1}{q} = 0$$

a) não admite raizes reais

b) admite uma raiz da forma $m\sqrt{-1}$, onde $m \in R$, $m > 0$

c) admite sempre raizes reais

d) admite uma raiz da forma $-m\sqrt{-1}$, onde $m \in R$, $m > 0$

e) n.d.a.

8. A respeito da equação, $3x^2 - 4x + \sqrt{3x^2 - 4x - 6} = 18$ podemos dizer:

a) $\frac{2 \pm \sqrt{70}}{3}$ são raizes

b) A única raiz é $x = 3$

c) A única raiz é $x = 2 + \sqrt{10}$

d) tem 2 raizes reais e 2 imaginárias

e) n.d.a.

9. A base AB, de uma fôlha de papel triangular que está sôbre uma mesa, mede 12 cm. O papel é dobrado levantando-se sua base, de modo que a dobra fique paralela à mesma. A área da parte do triângulo que fica visível após o papel ter sido dobrado, vale 0,36 da área do triângulo ABC. O comprimento da dobra vale:

a) 9,6 cm

b) 9,4 cm

c) 10 cm

d) 8 cm

e) n.d.a.

10. Os valores de x que verificam a desigualdade

$$\frac{1}{\log_e x} + \frac{1}{\log_x e - 1} > 1 \quad \text{são:}$$

a) $x > 1$

b) $x > e$

c) $0 < x < e$

d) $1 < x < e$

e) n.d.a.

11. Sejam $n \in N^+$, $p \in N$ onde $N = \{0,1,2,...\}$ $N^+ = \{1,2,3,...\}$

Então $\sum_{p=0}^{n} (-1)^{p-n}(-1)^{p}(-1)^{n-p} \binom{n}{p}$ vale

a) -1

b) 0

c) 1

d) 2

e) n.d.a.

12. A desigualdade $a^3 + \frac{1}{a^3} > a^2 + \frac{1}{a^2}$ é verdadeira se:

a) $|a| > 1$

b) $a \neq 1$, $a \neq 0$

c) $a > 0$ e $a \neq 1$

d) $|a| < 1$, $a \neq 0$

e) n.d.a.

13. Entre 4 e 5 horas o ponteiro das horas de um relógio fica duas vezes em ângulo reto com o ponteiro dos minutos. Os momentos destas ocorrências serão:

a) 4h $5\frac{2}{11}$ min e 4h $38\frac{5}{11}$ min

b) 4h $5\frac{5}{11}$ min e 4h $38\frac{2}{11}$ min

c) 4h $5\frac{5}{12}$ min e 4h $38\frac{5}{12}$ min

d) 4h $5\frac{3}{11}$ min e 4h $38\frac{7}{11}$ min

e) n.d.a.

14. Seja a equação do 4º grau $x^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$, onde q, r, s, t, são números racionais não nulos tais que : L, M, N, P são raizes reais dessa equação. O valor de
$\frac{L}{MNP} + \frac{M}{LNP} + \frac{N}{LMP} + \frac{P}{LMN}$ é :

a) $(q^2 - 2r)/t$
b) $(q^2 - r+s)/t$
c) $(q^2 - r)/t$
d) $\frac{q}{r} + \frac{r}{s} + \frac{s}{t} + \frac{t}{q}$

e) n.d.a.

15. Um octaedro regular é inscrito num cubo, que está inscrito numa esfera, e que está inscrito num tetraedro regular. Se o comprimento da aresta do tetraedro é 1, qual é o comprimento da aresta do octaedro?

a) $\sqrt{2/27}$

b) $\sqrt{3}/4$

c) $\sqrt{2}/4$

d) 1/6

e) n.d.a.

16. Certa liga contém 20% de cobre e 5% de estanho. Quantos quilos de cobre e quantos quilos de estanho devem ser adicionados a 100 quilos dessa liga para a obtenção de uma outra com 30% de cobre e 10% de estanho? (Tôdas as percentagens são em kg).

a) 18 kg de cobre e 6 kg de estanho

b) 17,50 kg de cobre e 7,5 kg de estanho

c) 18 kg de cobre e 7,5 kg de estanho

d) 17,50 kg de cobre e 7,8 kg de estanho

e) n.d.a.

17. A lei de decomposição do radium no tempo $t \geq 0$, é dada por $M(t) = Ce^{-kt}$, onde $M(t)$ é a quantidade de radium no tempo t, C,k são constantes positivas (*e* é a base do logarítmo neperiano). Se a metade da quantidade primitiva $M(0)$, desaparece em 1600 anos, qual a quantidade perdida em 100 anos?

a) $(1 - 100^{-1})$ da quantidade inicial

b) $(1 - 2^{-6})$ da quantidade inicial

c) $(1 - 2^{-16})$ da quantidade inicial

d) $(1 - 2^{-1/16})$ da quantidade inicial

e) n.d.a.

18. Seja a equação $(\log_e m)$ senx $\pm$ cosx $= \log_e m$. Quais as condições sôbre m para que a equação dada admita solução?

a) $m > 0$ se $x = (2k+1/2)\pi$; $m>0$ e $m \neq 1$ se $x \neq (2k+1/2)\pi$

b) $m \neq 0$ se $x = (2k+1/2)\pi$; $m \geqslant 0$ e $m \neq e$ se $x \neq (2k+1/2)\pi$

c) $m > e$ se $x = (2k+1/2)\pi$; $m \geq 1$ se $x \neq (2k+1/2)\pi$

d) $m > -1/e$ e $m \neq 0$ se $x = (2k+1/2)\pi$; $m \neq 0$ se $x \neq (2k+1/2)\pi$

e) n.d.a.

19. Eliminando θ nas equações $x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta = 2a\,\text{sen}\,\theta$

$x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta = a\cos\theta$, $a>0$ temos:

a) $(x+y)^{2/3} - (x-y)^{2/3} = 2a(x+y)^2$

b) $(x+y)^2 + (x-y)^2 = (x+y)a$

c) $(x+y)^{2/3} + (x-y)^{2/3} = 2a^{2/3}$

d) impossível eliminar θ

e) n.d.a.

20) Um cliente deposita num fundo de investimento Cr$ 1.000,00 anualmente, durante 5 anos. Seu capital, no final de cada ano, é acrescido de 10%. No final de 5 anos seu capital acumulado será de Cr$

a) 6.715,00

b) 6.715,62

c) 6.715,60

d) 6.715,61

e) n.d.a.

21) Durante o eclipse total do sol de 07 de março de 1970 a largura da faixa de escuridão total foi de 100 km. Em cada ponto do eixo central desta faixa, a duração do período de escuridão total foi de 3 minutos. Qual foi a duração dêste período num ponto situado a 10 km do limite da faixa de escuridão total?

a) 1 min. 36 seg.

b) 1 min. 48 seg.

c) 1 min. 30 seg.

d) 0 min. 36 seg.

e) n.d.a.

22. Seja a equação $3 \operatorname{tg} 3x = \left[3(\log_e t)^2 - 4\log_e t + 2\right] \operatorname{tg} x,\ x \neq n\pi$

Quais as condições sôbre t para que a equação acima admita solução?

a) $0<t<1/e$ ou $e^{1/3}<t<e$ ou $t>e^{7/3}$

b) $e^{1/3} \leq t \leq e^{3/2}$ ou $0 < t < e$

c) $e^{1/4}<t \leq e^{2/3}$ ou $1/e > t$

d) $t > 0$ e $t \neq 1$

e) n.d.a.

23. Seja L o comprimento do eixo de uma caldeira cilíndrica terminada por duas semi-esferas. Sabe-se que a área da superfície total da caldeira é $4\pi k^2$, com $0<k<L/2$. As dimensões da parte cilindrica da caldeira valem:

a) k^2/L e $L + 3k^2/L$

b) k^2/L e $k + (3/4)L$

c) $2k^2/L$ e $L - 4k^2/L$

d) $k^2/2L$ e $L + (4/3)k^2$

e) n.d.a.

24. Seja S uma semi-esfera de Raio R dado. Sejam p e q dois planos paralelos e distantes entre si R/2 e tais que interceptam S paralelamente à sua base. Seja T o tronco de cone com bases b e c, onde b e c são as intersecções de p e q com S. Seja x o valor da menor das distâncias d e D, onde d é a distância entre p e base de S, e D é a distância entre q e a base de S. Seja $K = \left[(R^2 - x^2)(R^2 - (x + \frac{R}{2})^2)\right]^{1/2}$.
Então o volume de T, como função de x, $0 \leq x \leq R/2$, vale:

a) $\frac{\pi R}{6} (\frac{7}{4} R^2 - 2x^2 - Rx + K)$

b) $\frac{\pi R}{12} (\frac{7}{4} R^2 - 2x^2 - Rx + K)$

c) $\frac{\pi R}{12} (\frac{7}{4}R^2 - 2x^2 - Rx - K)$

d) $\frac{\pi R}{6} (\frac{7}{4}R^2 - 2x^2 - Rx - K)$

e) n.d.a.

25. A solução da equação

$$\log_u \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{2(k+1)!} \right) x = 1 \ ; \ n = \text{número inteiro positivo dado,}$$

com $u = \dfrac{1}{(n+2)!}$, é

a) $2/\left[(n+1)! - 1\right]$

b) $2/\left[n\ (n+1)! - 1)\right]$

c) $2/\left[(n+2)! - (n+2)\right]$

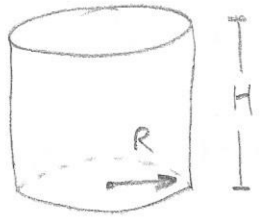
d) $\left[(n+1)! - 1\right] / (2n)$

e) n.d.a.

ITA – MAT – 1973

BOTELHO

(1)



$$\frac{2}{\frac{1}{R}+\frac{1}{H}} = 4$$

$$V = \pi R^2 H$$

$$S_{TOTAL} = 2\pi R H + 2\pi R^2$$

$$\frac{RH}{R+H} = 2$$

$$\frac{V}{S_{TOTAL}} = \frac{\pi R^2 H}{2\pi R(R+H)} = \frac{RH}{2(R+H)} = 1$$

A

(2) $X(t) = C e^{kt}$

INICIAL $\rightarrow t=0 \rightarrow X(0) = C$

APÓS $4h \rightarrow t=4 \rightarrow X(4) = C e^{4k} = 2C$

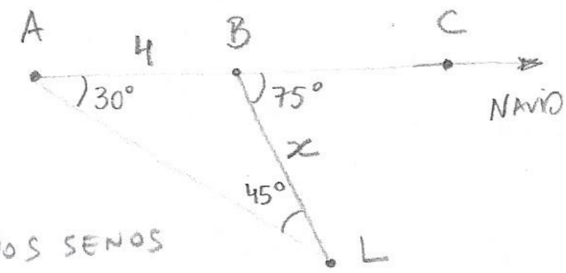
APÓS $6h \rightarrow t=6 \rightarrow X(6) = C e^{6k} = x C$

$e^{4k} = 2 \;\therefore\; e^{2k} = \sqrt{2} \;\therefore\; e^{6k} = 2\sqrt{2}$

$x = 2\sqrt{2}$

C

(3)



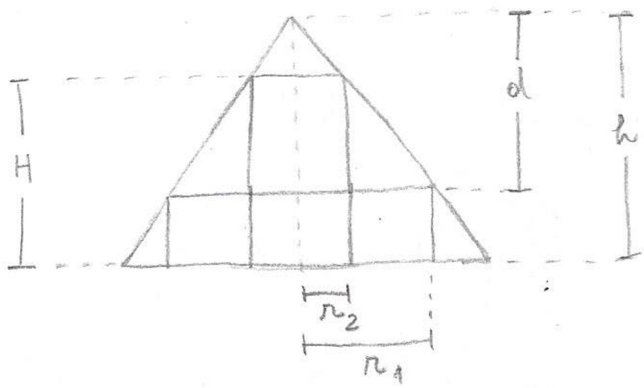
LEI DOS SENOS

Δ ABL

$$\frac{x}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{4}{\operatorname{sen} 45°} \;\therefore\; x = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

B

(4) VISTA LATERAL



$V_1 = \pi r_1^2 (h-d)$

$V_2 = \pi r_2^2 H$

$V_1 = V_2$

$\pi r_1^2 (h-d) = \pi r_2^2 H$

$$H = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \cdot (h-d) \quad \therefore \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{d}{h-H}$$

$$H = \frac{d^2(h-d)}{(h-H)^2} \quad \therefore \quad H(h-H)^2 = d^2(h-d)$$

É UMA EQUAÇÃO DO 3.º GRAU EM H

MAS UMA DAS RAÍZES É $H = h-d$ (CILINDRO 1)

PODEMOS ABAIXAR PARA O 2.º GRAU

$H(h^2 - 2hH + H^2) = d^2 h - d^3$

$H^3 - 2h H^2 + h^2 H + d^3 - d^2 h = 0$

(continua)

BRIOT - RUFFINI

	1	$-2h$	h^2	d^3-d^2h
$h-d$	1	$-h-d$	d^2	0

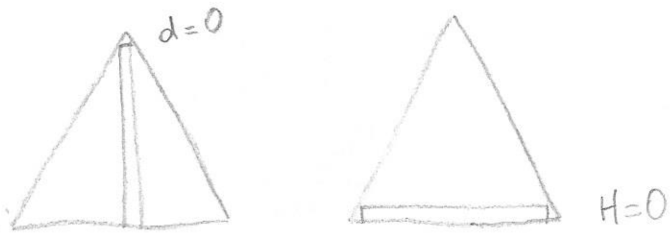
$$H^2-(h+d)H+d^2=0$$

$$H=\frac{h+d\pm\sqrt{(h+d)^2-4d^2}}{2}=$$

$$=\frac{h+d\pm\sqrt{(h+d+2d)(h+d-2d)}}{2}=$$

$$=\frac{h+d\pm\sqrt{(h-d)(h+3d)}}{2}$$

CASO LIMITE $d=0 \Longleftrightarrow H=0$



$$H=\frac{h\pm h}{2} \begin{array}{l} \nearrow h \ \times \\ \searrow 0 \ \checkmark \end{array}$$

SINAL MENOS

$$H=\frac{h+d-\sqrt{(h-d)(h+3d)}}{2}$$

D//

(5)

$$a^k+\ldots+\binom{k}{p}a^{k-p}b^p+\ldots+b^k=(a+b)^k$$

$$(a+b)^k\cdot(a+b)=(a+b)^{k+1}$$

$$k=m \therefore (a+b)^{m+1}$$

$$T_{p+1}=\underbrace{\binom{m+1}{p}}\,a^{m+1-p}\,b^p$$

B//

(6) $\sqrt[x-3]{x}\cdot\sqrt{x}\leq\frac{1}{x}$

$$x^{\frac{1}{x-3}}\cdot x^{\frac{1}{2}}\leq x^{-1}$$

$$x^{\frac{2+x-3}{2(x-3)}}\leq x^{-1}$$

$$x^{\frac{x-1}{2(x-3)}}\leq x^{-1}$$

CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE $\sqrt{x}\to x\geq 0$

CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE $\frac{1}{x}\to x\neq 0$

CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE $\sqrt[x-3]{x}\to x>3$

(JÁ DÁ PRA VER QUE É N.D.A.)

COMO $x>3 \to \frac{x-1}{2x-6}\leq -1$

$$\frac{x-1}{2x-6}+1\leq 0 \therefore \frac{x-1+2x-6}{2x-6}\leq 0$$

$$\frac{3x-7}{2x-6}\leq 0$$

		$3/7$		3	
$3x-7$	$-$	0	$+$		$+$
$2x-6$	$-$		$-$	$\nexists$	$+$
Q	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

$$\frac{3}{7}\leq x<3$$

A DESIGUALDADE NUNCA É VÁLIDA

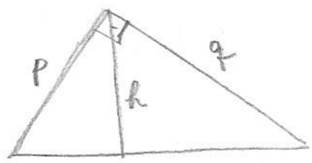
E//

ITA - MAT - 1973

BOTELHO

(continuação)

(7)



$$\frac{2}{p}x^2 - \frac{2}{h}x + \frac{1}{q} = 0$$

$$x = \frac{\frac{2}{h} \pm \sqrt{\frac{4}{h^2} - 4\cdot\frac{2}{p}\cdot\frac{1}{q}}}{\frac{4}{p}}$$

MAS "ah=bc" $\rightarrow \sqrt{p^2+q^2}\cdot h = pq$

$$\frac{1}{h} = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{pq} \quad \therefore \quad \frac{1}{h^2} = \frac{p^2+q^2}{p^2q^2}$$

$$x = \frac{p}{2h} \pm \frac{p}{2}\sqrt{\frac{1}{h^2} - \frac{2}{pq}}$$

$$x = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{2q} \pm \frac{p}{2}\sqrt{\frac{p^2+q^2}{p^2q^2} - \frac{2pq}{p^2q^2}}$$

$$x = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{2q} \pm \frac{p}{2}\sqrt{\frac{(p-q)^2}{p^2q^2}}$$

$$x = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{2q} \pm \frac{p}{2}\cdot\frac{(p-q)}{pq}$$

$$x = \frac{\sqrt{p^2+q^2} \pm (p-q)}{2q}$$

AS RAÍZES SÃO SEMPRE REAIS

C

(8) $3x^2 - 4x + \sqrt{3x^2-4x-6} = 18$

SEJA $y = 3x^2 - 4x$

$$y + \sqrt{y-6} = 18 \quad \therefore \quad \sqrt{y-6} = 18 - y$$

$$y - 6 = 324 - 36y + y^2 \quad \therefore \quad y^2 - 37y + 330 = 0$$

$$y = \frac{37 \pm \sqrt{1369 - 4\cdot 330}}{2} = \frac{37 \pm 7}{2} \begin{array}{l} \nearrow 22 \\ \searrow 15 \end{array}$$

$3x^2 - 4x - 22 = 0 \quad (y = 22)$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 3\cdot(-22)}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{280}}{6} =$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{70}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{70}}{3}$$ MAS CUIDADO

SE $3x^2 - 4x = 22 \rightarrow 22 + \underbrace{\sqrt{22-6}}_{4} = 26$

(NÃO É -4)

22 NÃO SERVE ("A" ERRADA)

$3x^2 - 4x - 15 = 0 \quad (y = 15)$

$15 + \sqrt{15-6} = 18$ (OK)

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 3\cdot(-15)}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{16+180}}{6} =$$

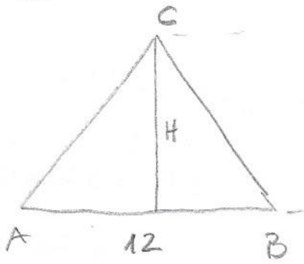
$$= \frac{4 \pm 14}{6} \begin{array}{l} \nearrow 3 \\ \searrow \frac{-10}{6} = \frac{-5}{3} \end{array}$$

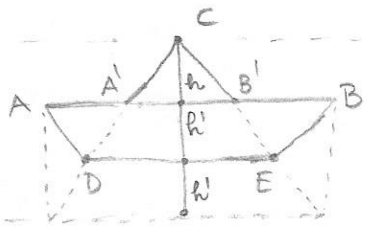
SÓ ESSAS DUAS RAÍZES

N.D.A.

E

(9) ANTES DEPOIS





$x = DE \therefore \frac{x}{12} = \frac{h+h'}{H}$

$\left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{S_{A'B'C}}{S_{ABC}} = 0,36 \therefore h = 0,6H$

$h' = \frac{H - 0,6H}{2} = 0,2H$

$x = \frac{12 \cdot (0,6+0,2)H}{H} = 12 \cdot 0,8 = 9,6$ cm

A

(10) $\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\log_x^e - 1} > 1$

CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE $\ln x \rightarrow x > 0$

CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE $\log_x^e \rightarrow x > 0$ E $x \neq 1$

SEJA $\frac{1}{\ln x} = y \therefore \log_x^e = \frac{\ln e}{\ln x} = \frac{1}{\ln x} = y$

$y + \frac{1}{y-1} - 1 > 0 \therefore y - 1 + \frac{1}{y-1} > 0$

$y - 1 > 0 \therefore y > 1 \therefore \frac{1}{\ln x} > 1$

$\frac{1}{\ln x} - 1 > 0 \therefore \frac{1 - \ln x}{\ln x} > 0$

		0		1	
$1 - \ln x$	+		+	0	−
$\ln x$	−	∄	+		+
Q	−	∄	+	0	−
			↑		

$0 < \ln x < 1$

$1 < x < e$

D

(11) $(1-1)^m = \sum_{p=0}^{m} 1^{m-p}(-1)^p \binom{m}{p}$

$0 = \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \binom{m}{p}$

$x = \sum_{p=0}^{m} (-1)^{p-m} (-1)^p (-1)^{m-p} \binom{m}{p}$

$(-1)^{p-m} \cdot (-1)^{m-p} = (-1)^0 = 1$

$x = \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \binom{m}{p} = 0$

B

(12) $a^3 + \frac{1}{a^3} > a^2 + \frac{1}{a^2}$

$a^3 - a^2 + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^2} > 0 \therefore a^2(a-1) - \frac{1}{a^3}(a-1) > 0$

$\left(a^2 - \frac{1}{a^3}\right)(a-1) > 0 \therefore \frac{(a^5-1)(a-1)}{a^3} > 0$

		0		1	
$a^5 - 1$	−		−	0	+
$a - 1$	−		−	0	+
a	−	∄	+		+
Q	−	∄	+	0	+
			↑		↑

$a > 0$ E $a \neq 1$

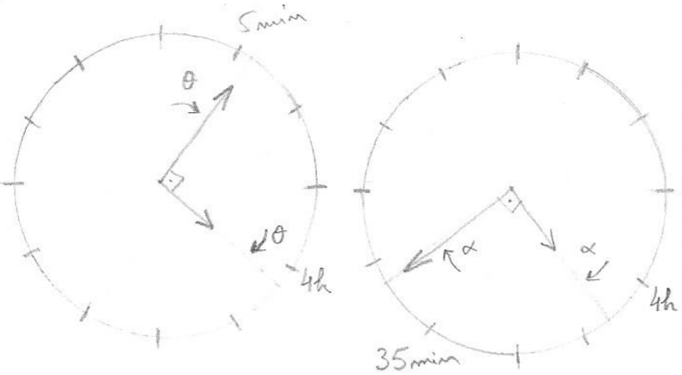
C

ITA - MAT - 1973

BOTELHO

(continuação)

(13) CASO 1 CASO 2



CADA HORA $\rightarrow \dfrac{360^\circ}{12} = 30^\circ$

NO CASO 1, O ÂNGULO QUE O PONTEIRO DAS HORAS PASSOU DE 4h É IGUAL AO ÂNGULO QUE O PONTEIRO DOS MINUTOS PASSOU DOS 5min

60 min — 30° 5 min — 30°

x min — θ° x min — $(30+\theta)^\circ$

$60\theta = 30x$ $5(30+\theta) = 30x$

$x = 2\theta \therefore 150 + 5\theta = 60\theta$

$\theta = \dfrac{150}{55} \therefore x = \dfrac{300}{55} = \dfrac{60}{11} = 5\,\dfrac{5}{11}$ min

NO CASO 2, O ÂNGULO QUE O PONTEIRO DAS HORAS PASSOU DE 4h É IGUAL AO ÂNGULO QUE O PONTEIRO DOS MINUTOS PASSOU DE 35min

60 min — 30° 5 min — 30°

y min — α° y min — $(210+\alpha)^\circ$

$60\alpha = 30y$ $5(210+\alpha) = 30y$

$y = 2\alpha$ $1050 + 5\alpha = 60\alpha$

$\alpha = \dfrac{1050}{55} \therefore y = \dfrac{2100}{55} = \dfrac{420}{11} = 38\,\dfrac{2}{11}$ min

B

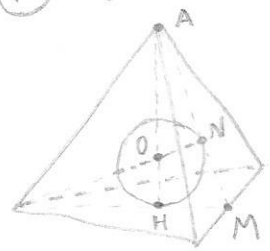
(14) $\dfrac{L}{MNP} + \dfrac{M}{LNP} + \dfrac{N}{LMP} + \dfrac{P}{LMN} =$

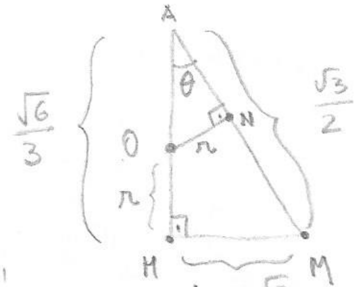
$= \dfrac{L^2+M^2+N^2+P^2}{LMNP} = \dfrac{(L+M+N+P)^2 - 2\sum x_i x_j}{LMNP} =$

$= \dfrac{(-q)^2 - 2r}{t} = \dfrac{q^2-2r}{t}$

A

(15) ESFERA INSCRITA NO TETRAEDRO





$AH = \sqrt{AM^2 - HM^2} =$

$= \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{36}} = \sqrt{\dfrac{27-3}{36}} =$

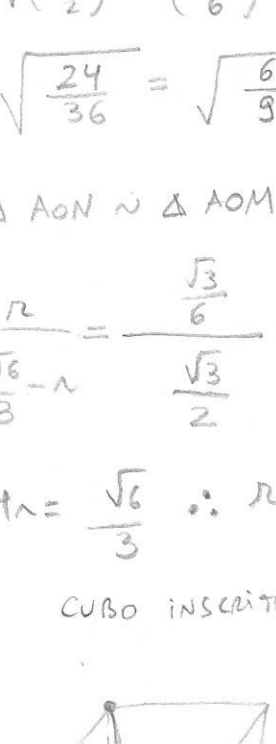
$= \sqrt{\dfrac{24}{36}} = \sqrt{\dfrac{6}{9}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\Delta AON \sim \Delta AOM \therefore \dfrac{ON}{AO} = \dfrac{HM}{AM}$

$\dfrac{r}{\frac{\sqrt{6}}{3} - r} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{3} \therefore 3r = \dfrac{\sqrt{6}}{3} - r$

$4r = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \therefore r = \dfrac{\sqrt{6}}{12}$

CUBO INSCRITO NA ESFERA



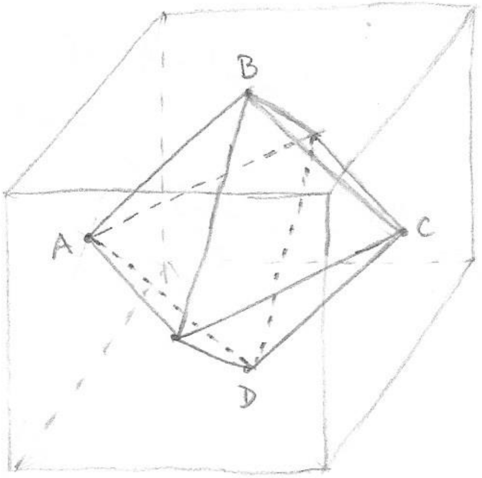
DIAGONAL PRINCIPAL DO CUBO É DIÂMETRO DA ESFERA

$a_3\sqrt{3} = 2r = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

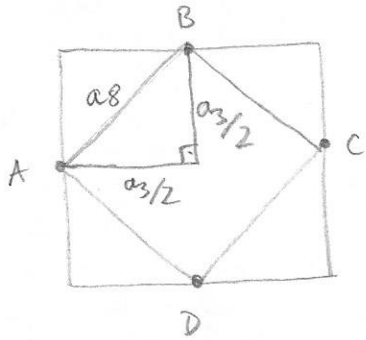
$a_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$

(continua)

OCTAEDRO INSCRITO NO CUBO



VISTA LATERAL



$$a_8 = \frac{a_3}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{6}$$

D

---

(16) 100 kg DE LIGA → 20 kg Cu + 5 kg Sm

$(100+x+y)$ $\quad (20+x) \quad (5+y)$

$\quad\quad 30\% \quad 10\%$

$$20+x = 0{,}3(100+x+y) \therefore 0{,}7x - 0{,}3y = 10$$
$$5+y = 0{,}1(100+x+y) \therefore -0{,}1x + 0{,}9y = 5$$

$$2{,}1x - 0{,}9y = 30$$
$$-0{,}1x + 0{,}9y = 5$$

$$2x = 35$$
$$x = 17{,}5 \text{ kg Cu}$$

$$0{,}9y = 5 + 0{,}1x = 5 + 1{,}75 = 6{,}75$$
$$y = \frac{67{,}5}{9} = 7{,}5 \text{ kg Sm}$$

B

---

(17) INÍCIO $(t=0)$

$$M(0) = Ce^{-k\cdot 0} = C$$

$t = 1600$ ANOS

$$M(1600) = Ce^{-k\cdot 1600} = \frac{C}{2}$$

$$e^{-1600k} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$$

$t = 100$ ANOS

$$M(100) = Ce^{-k\cdot 100} = C\cdot 2^{-1/16}$$

$$\text{PERDA} = C - C\cdot 2^{-1/16} = C\left(1 - 2^{-1/16}\right)$$

D

---

(18) $\ln m \cdot \operatorname{sen} x \pm \cos x = \ln m$

$$\pm\cos x = \ln m\,(1 - \operatorname{sen} x)$$
$$\cos^2 x = \ln^2 m\,(1-\operatorname{sen} x)^2$$
$$1 - \operatorname{sen}^2 x = \ln^2 m\,(1-\operatorname{sen} x)^2$$
$$(1+\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x) = \ln^2 m\,(1-\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)$$

SE $1 - \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = 1$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi$$

BASTA QUE $m > 0$ (PARA QUE $\ln m$ EXISTA)

SE $1 - \operatorname{sen} x \neq 0$:

$$1 + \operatorname{sen} x = \ln^2 m\,(1 - \operatorname{sen} x)$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{\ln^2 m - 1}{\ln^2 m + 1} \therefore -1 \leq \operatorname{sen} x < 1$$

$$\frac{\ln^2 m - 1}{\ln^2 m + 1} \geq -1 \therefore \frac{\ln^2 m - 1}{\ln^2 m + 1} + 1 \geq 0$$

$$\frac{\ln^2 m - 1 + \ln^2 m + 1}{\ln^2 m + 1} = \underbrace{\frac{2\ln^2 m}{\ln^2 m + 1} \geq 0}_{\text{SEMPRE VERDADE}}$$

BASTA $m > 0$

(continua)

ITA – MAT – 1973

BOTELHO
(continuação)

$$\frac{\ln^2 m - 1}{\ln^2 m + 1} < 1 \quad \therefore \quad \frac{\ln^2 m - 1}{\ln^2 m + 1} - 1 < 0$$

$$\frac{\ln^2 m - 1 - \ln^2 m - 1}{\ln^2 m + 1} < 0 \quad \therefore \quad \frac{-2}{\underbrace{\ln^2 m + 1}} < 0$$

SEMPRE VERDADE
BASTA $m > 0$

CONCLUSÃO: EM QUALQUER CASO, BASTA $m > 0$

E

---

(19)
$$\begin{cases} x \operatorname{sen}\theta + y\cos\theta = 2a\operatorname{sen}\theta & (I) \\ x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta = a\cos\theta & (II) \end{cases}$$

DE (I): $y\cos\theta = (2a - x)\operatorname{sen}\theta$

DE (II): $(x - a)\cos\theta = y \operatorname{sen}\theta$

$\div$

$$\frac{y}{x-a} = \frac{2a - x}{y} \quad \therefore \quad y^2 = (2a - x)(x - a)$$

$$y^2 = 2ax - 2a^2 - x^2 + ax$$

$$x^2 - 3ax + \frac{9a^2}{4} + y^2 = -2a^2 + \frac{9a^2}{4}$$

$$\left(x - \frac{3a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

OBS.: CIRCUNFERÊNCIA DE CENTRO $\left(\frac{3a}{2}, 0\right)$ E RAIO $\frac{a}{2}$

E

---

(20) $M = C(1 + j)^n$

$$x = \underbrace{1000(1+0,1)^5}_{1^{\circ}\text{ ANO NO FINAL DO }5^{\circ}} + \underbrace{1000(1+0,1)^4}_{2^{\circ}\text{ ANO NO FINAL DO }5^{\circ}} +$$

$$+ \underbrace{1000\cdot(1+0,1)^3}_{3^{\circ}\text{ ANO NO FINAL DO }5^{\circ}} + \underbrace{1000\cdot(1+0,1)^2}_{4^{\circ}\text{ ANO NO FINAL DO }5^{\circ}} +$$

$$+ \underbrace{1000\cdot(1+0,1)}_{5^{\circ}\text{ ANO NO FINAL DO }5^{\circ}}$$

SOMA DE PG DE $\begin{cases} 5 \text{ TERMOS} \\ \text{TERMO INICIAL } 1100 \\ \text{RAZÃO } 1,1 \end{cases}$

$$S_n = \frac{a_0(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$x = S_5 = \frac{1100\cdot(1,1^5 - 1)}{1,1 - 1} = 11000(1,1^5 - 1) = 1000(1,1^6 - 1,1)$$

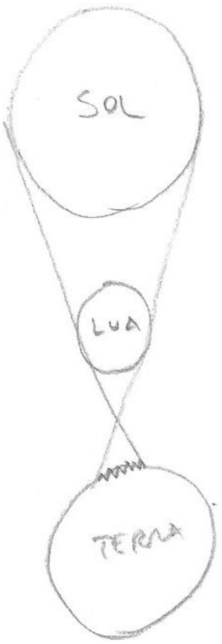
$$1,1^6 = 1,1^2 \cdot 1,1^2 \cdot 1,1^2 = 1,21 \cdot 1,21 \cdot 1,21 = 1,771561$$

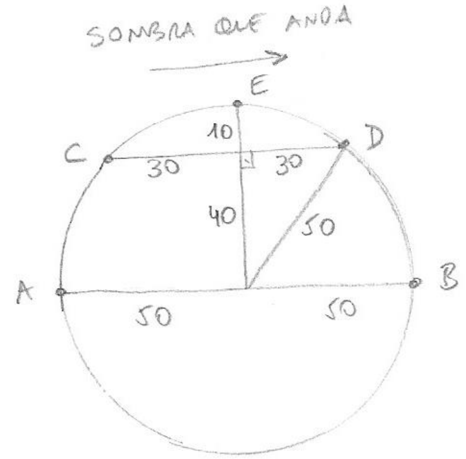
```
  121        14641
  121          121
 ----        -----
  121        14641
 242        29282
121        14641
-----      -------
14641      1771561
```

$$x = 1000(1,771561 - 1,1) = 1000(0,671561) = 671,561$$

D

(21) A QUESTÃO NÃO É CLARA, MAS TEMOS QUE CONSIDERAR QUE: A SOMBRA DA LUA PROJETADA PELO SOL É UM CÍRCULO (ÁREA) SOBRE A TERRA; A SUPERFÍCIE DA TERRA É PLANA; A PROJEÇÃO É NORMAL





AB=100 = DISTÂNCIA QUE A SOMBRA ANDA SOBRE PONTO DO "EIXO CENTRAL DA FAIXA"

CD = 60 = DISTÂNCIA QUE A SOMBRA ANDA SOBRE PONTO A 10km DO LIMITE (PONTO E) DA FAIXA DE ESCURIDÃO TOTAL

100 km —— $3 \cdot 60$ s

60 km —— x s

$$x = \frac{3 \cdot 60 \cdot 60}{100} = 3 \cdot 36 = 108\,s = 1\,min\ 48\,s$$

B

(22) É A QUESTÃO 19 DE ITA-MAT-72 CORRIGIDA, EVITANDO $tgx = 0$

$$tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga\,tgb}$$

$$tg\,2x = tg(x+x) = \frac{tgx + tgx}{1 - tgx\,tgx} = \frac{2\,tgx}{1 - tg^2x}$$

$$tg\,3x = tg(2x+x) = \frac{tg2x + tgx}{1 - tg2x\,tgx} = \frac{\frac{2tgx}{1-tg^2x} + tgx}{1 - \frac{2tgx}{1-tg^2x} \cdot tgx} =$$

$$= \frac{2\,tgx + tgx - tg^3x}{1 - tg^2x - 2tg^2x} = \frac{3tgx - tg^3x}{1 - 3tg^2x}$$

$$3\,tg\,3x = [3(\ln t)^2 - 4\ln t + 2]\,tgx$$

$$\frac{3 \cdot tgx(3 - tg^2x)}{1 - 3tg^2x} = \underbrace{[3(\ln t)^2 - 4\ln t + 2]}_{s}\,tgx$$

$x \neq m\pi \to tgx \neq 0 \to$ PODE ELIMINAR

$$s = \frac{9 - 3tg^2x}{1 - 3tg^2x} \therefore s - 3s\,tg^2x = 9 - 3tg^2x$$

$$tg^2x = \frac{s-9}{3(s-1)} \therefore \frac{s-9}{3(s-1)} > 0$$

		1		9	
$s-9$	−		−	o	+
$s-1$	−	o	+		+
Q	+	$\nexists$	−	o	+

$s < 1$ OU $s > 9$

1ª DESIGUALDADE ($s<1$)

$$3(\ln t)^2 - 4\ln t + 2 < 1$$

$$3(\ln t)^2 - 4\ln t + 1 < 0$$

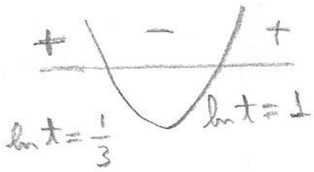
RAÍZES $\to \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6}$ ↗ $1/3$ ↘ 1

(Continua...)

ITA – MAT – 1973

BOTELHO

(continuação)



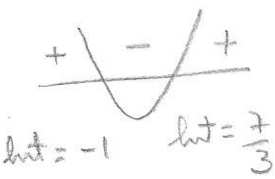
$e^{\frac{1}{3}} < t < e$ //

2ª DESIGUALDADE ($s > 9$)

$3(\ln t)^2 - 4\ln t + 2 > 9$

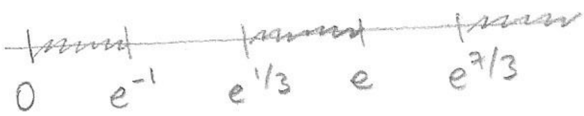
$3(\ln t)^2 - 4\ln t - 7 > 0$

RAÍZES $\rightarrow \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3(-7)}}{6} = \dfrac{4 \pm 10}{6}$ ↗ -1 ↘ $\dfrac{7}{3}$



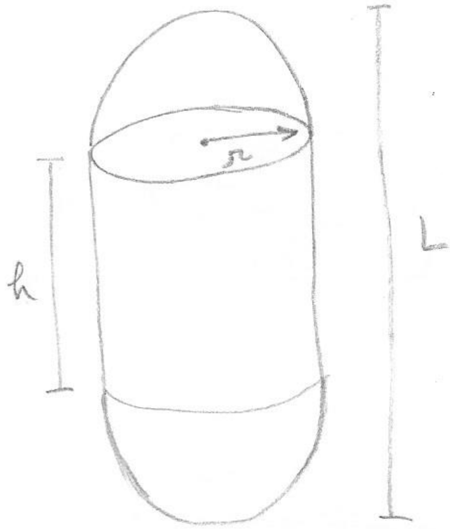
$t < e^{-1}$ ou $t > e^{7/3}$ //

CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE $\ln t \rightarrow t > 0$ //



A //

(23)



$S_{TOTAL} = S_{\substack{LATERAL \\ CILINDRO}} + S_{ESFERA}$

$4\pi k^2 = 2\pi r h + 4\pi r^2$

$2k^2 = rh + 2r^2$ (I)

$L = h + 2r$ (II)

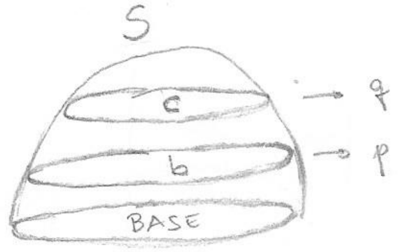
(II) EM (I) $\rightarrow 2k^2 = r(L - 2r) + 2r^2$

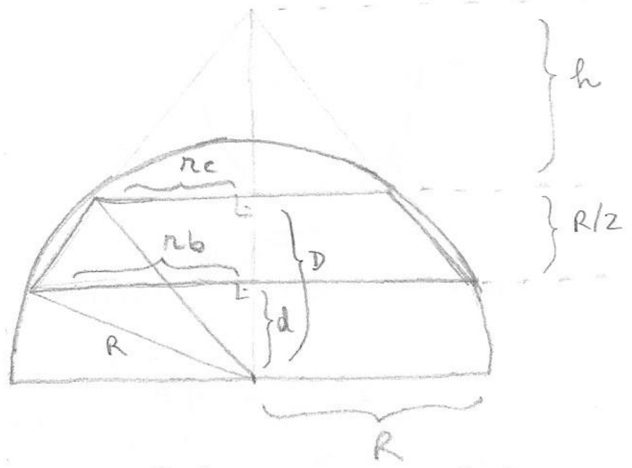
$2k^2 = rL - 2r^2 + 2r^2 \therefore r = \dfrac{2k^2}{L}$ //

$h = L - 2r = L - \dfrac{4k^2}{L}$ //

C //

(24)





$$V_T = \frac{\pi}{3} r_b^2 \left(h + \frac{R}{2}\right) - \frac{\pi}{3} r_c^2 h$$

$$\frac{r_c}{h} = \frac{r_b}{h + \frac{R}{2}} \quad \therefore \; d = x \;\; \therefore \; D = x + \frac{R}{2}$$

$$r_b^2 = R^2 - d^2 = R^2 - x^2$$

$$r_c^2 = R^2 - D^2 = R^2 - \left(x + \frac{R}{2}\right)^2$$

$$K = \left(r_b^2 \cdot r_c^2\right)^{1/2} = r_b r_c$$

$$r_c \cdot h + \frac{R r_c}{2} = r_b \cdot h \;\; \therefore \; h = \frac{r_c \cdot R}{2(r_b - r_c)}$$

$$V_T = \frac{\pi}{3} h (r_b^2 - r_c^2) + \frac{\pi}{3} r_b^2 \frac{R}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{r_c R (r_b^2 - r_c^2)}{2(r_b - r_c)} + \frac{\pi}{3} r_b^2 \frac{R}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{6} r_c R (r_b + r_c) + \frac{\pi}{6} r_b^2 R =$$

$$= \frac{\pi}{6} R \left(r_b r_c + r_c^2 + r_b^2\right) =$$

$$= \frac{\pi R}{6} \left(K + R^2 - \left(x^2 + Rx + \frac{R^2}{4}\right) + R^2 - x^2\right) =$$

$$= \frac{\pi R}{6} \left(\frac{7R^2}{4} - 2x^2 - Rx + K\right)$$

A

(25) $\log_{\mu}(x\Sigma) = 1$

$$x\Sigma = \mu \quad \therefore \; x = \frac{\mu}{\Sigma}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{k}{2(k+1)!} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1!} - \cancel{\frac{1}{2!}} + \cancel{\frac{1}{2!}} - \cancel{\frac{1}{3!}} + \cancel{\frac{1}{3!}} - \cancel{\frac{1}{4!}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{m!}} - \frac{1}{(m+1)!}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{(m+1)!}\right) = \frac{(m+1)! - 1}{2(m+1)!}$$

$$x = \frac{1}{(m+2)!} \cdot \frac{2(m+1)!}{(m+1)! - 1} = \frac{2}{(m+2)! - (m+2)}$$

C