MINISTÉRIO DA AERONÁUTICA
CENTRO TÉCNICO DE AERONÁUTICA
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

CONCURSO DE ADMISSÃO - 1971

EXAME DE MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES

1. A duração da prova é de 4 horas.
2. A prova de Matemática consta de 25 questões de Múltipla Escôlha.
3. Só há uma resposta certa em cada questão.
4. NÃO DEIXE DE RESPONDER NENHUMA QUESTÃO. QUANDO EM DÚVIDA, ASSINALE A RESPOSTA QUE LHE PARECER MAIS CORRETA.
5. Questões não respondidas ocasionam rejeição do cartão pelo computador, podendo prejudicar o candidato.
6. Não escreva no caderno de questões.
7. Assinale com um traço curto e forte de lápis o espaço correspondente a cada questão, na fôlha de respostas.
8. Verificando algum engano nas respostas poderá corrigí-lo usando borracha.
9. Observe cuidadosamente o número das questões ao respondê-las.
10. O agente fiscal fornecerá papel para rascunho, o qual não será considerado na correção da prova.
11. Não será permitido o uso de tabelas, régua de cálculo, apontamentos, formulários e outros papéis a não ser os fornecidos pelo / fiscal.
12. O caderno de questões contém 6 páginas numeradas de 2 a 7 .
13. No caderno de questões N.d.r.a. significa nenhuma dessas respostas anteriores.
14. log m significa logarítmo de m na base e.
15. Lidas estas instruções aguarde a ordem do fiscal para o início do exame.

1. Qual o resto da divisão por 3 do determinante

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & -6 \\ (3-4) & (6-1) & (-3-5) & (9+6) \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

A) 0 ; B) 3 ; C) 7 ; D) 1 ; E) N.d.r.a.

2. Sejam α e β dois planos não paralelos interceptados ortogonalmente pelo plano γ. Sejam ainda r, s e t respectivamente as intersecções de α e β, α e γ e β e γ. Qual das afirmações abaixo é sempre correta.

A) r, s e t formam oito triedros triretângulos,
B) Existe um ponto P de r tal que, qualquer reta d e γ que passe por P é ortogonal a r ,
C) r pode não interceptar γ
D) t é perpendicular a α
E) Nenhuma dessas afirmações é correta.

3. O produto dos termos da seguinte P. G.

$-\sqrt{3}$, $\bar{3}$, $-3\quad 3$;..., $-81\quad 3$ é

A) 3^{25} ; B) 3^{42} ; C) 5.3^{9} ; D) 3^{45} ; E) N.d.r.a.

4. Se f é uma função real de variável real dada por $f(x) = x^2$, então

f)$(x^2 + y^2)$ é igual a :

A) f (f(x)) + f (y) + 2f(x) f(y) para todo x e y
B) f (x^2) + 2f (f(x)) + f (x) f (y) para todo x e y
C) f (x^2) + f (y^2) + f (x) f(y) para todo x e y
D) f (x) + f (f (y)) + 2f(x) f (y) para todo x e y
E) f (f(x)) + 2f(y^2) + 2f(x) f(y) para todo x e y

5. Uma solução da equação

$24\ x^5 - 4\ x^4 + 49\ x^3 - 2\ x^2 + x - 29 = 0$ é

A) $x = \frac{2}{3}$; B) $x = \frac{11}{12}$; C) $x = \frac{3}{4}$; D) $x = \frac{4}{3}$; E) N.d.r.a.

6. Seja a desigualdade

$$2(\log x)^2 - \log x > 6.$$

Determinando-se as soluções desta desigualdade obtemos :

A) $0 < x < \frac{1}{e}$ e $x > 10^2$; B) $0 < x < e^{-3/2}$ e $x > e^2$

C) $0 < x < e$ e $x < 10$; D) $\frac{1}{e} < x < 1$ e $x > e$; E) N.d.r.a.

7. Dada um circunferência de diâmetro AB, centro 0 e um ponto C da circunferência, achar o lugar geométrico dos pontos intersecção do raio OC à paralela ao diâmetro AB e passando pelo pé da perpendicular a AC tirada por 0 .

A) um segmento de reta paralela a $\overline{AB}$; B) uma circunferência de raio $\frac{2R}{3}$ e origem 0; C) uma circunferência de raio R/2 e origem 0; D) uma elípse de semi-eixo maior $\overline{OA}$; E) N.d.r.a.

8. Consideremos a equação $\{\log(\text{sen } x)\}^2 - \log(\text{sen } x) - 6 = 0$
a(s) solução (es) da equação acima é dada por :

A) $x = \text{arc sen}(e^2)$ e $x = \text{arc sen}(3)$; B) $x = \text{arc sen } (\frac{1}{2})$ e $x =$
$= \text{arc sen } (\frac{1}{3})$; C) $x = \text{arc tg}(e^2)$ e $x = \text{arc cos}(3)$;

D) $x = \text{arc sen } (\frac{1}{e^2})$; E) N.d.r.a.

9. Uma progressão geométrica de 3 têrmos positivos cuja soma é <u>m</u> , tem seu segundo termo igual a 1. Que valores deve assumir m, para que o problema tenha solução.

A) $0 < m \leq 1$; B) $1 \leq m < 3$; C) $m \geq 3$;

D) $1 \leq m \leq 2$; E) N.d.r.a.

10. Dada a equação log (cos x) = tg x ,
as soluções desta equação em x satisfazem a relação :

A) $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$; B) $0 < x < \frac{\pi}{2}$; C) $0 < x < \pi$

D) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; E) N.d.r.a.

11. Dado um cone reto de geratriz g e altura h, calcular a que distância do vértice deveremos passar um plano paralelo à base, a fim de que a secção obtida seja equivalente à área lateral do tronco formado.

A) $\sqrt{g(g - h)}$; B) $\sqrt{g(g - \sqrt{g^2 - h^2})}$

C) $\sqrt{g^2 - \sqrt{g^2 - h^2}}$; D) $\sqrt{h^2 - g\sqrt{g^2 - h^2}}$; E) N.d.r.a.

12. O sistema de desigualdades

$$\begin{cases} ax^2 + bx \geq 0 \\ \frac{a}{4}x^2 - bx + (2b - a) < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad a > 0,\ b > 0,\ b \neq a .$$

Tem solução para

A) $x < \frac{-b}{a}$ e $b > a$; B) $x > 2$ e $b < a$;

C) $0 < x < 1$ e $b > \frac{3}{4}a$; D) $x > \frac{4b}{a} - 2$ e $a > 2b$; E) N.d.r.a.

13. A seguinte soma $\log \frac{1}{2} + \log \frac{1}{4} + \ldots + \log \frac{1}{2^n}$
com n natural, é igual a

A) $\log \frac{n + n^3}{2}$; B) $(n + n^2) \log \sqrt{\frac{1}{2}}$; C) $- n(n + 1)\ 2\log 2$

D) $\left(\frac{n^2 - 1}{2}\right)\ 2^{\sqrt{2}}$; E) N.d.r.a.

14. Qual o resto da divisão por $x - a$, do polinômio

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

A) $2x^3 + c$; B) $6x^2 + 7$; C) 5 ; D) 0 ; E) N.d.r.a.

15. Dividindo o polinômio $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ pelo polinômio $Q(x)$ obtemos o quociente $S(x) = 1 + x$ e o resto $R(x) = x + 1$. O polinômio $Q(x)$ satisfaz

A) $Q(2) = 0$; B) $Q(3) = 0$; C) $Q(0) \neq 0$; D) $Q(1) \neq 0$;

E) N.d.r.a.

16. Seja $P(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_{100}x^{100}$, onde $a_{100} = 1$, um polinômio devisível por $(x + 9)^{100}$. Nestas condições temos :

A) $a_2 = 50 \times 99 \times 9^{98}$; B) $a_2 = \frac{100\,!}{2\,!\;98\,!}$; C) $a_2 = \frac{99\,!}{2\,!\;98\,!}$

D) $a_2 = \frac{100\,!\;9^2}{2\,!\;98\,!}$; E) N.d.r.a.

17. Determinando-se a condição sôbre t para que a equação

$$4^x - (\log t + 3)\, 2^x - \log t = 0$$

admita duas raizes reais e distintas, obtemos :

A) $e^{-3} \leq t \leq 1$; B) $t \geq 0$; C) $e^{-1} < t < 1$

D) $3 < t < e^2$; E) N.d.r.a.

18. Qual é o menor valor de x que verifica a equação tgx + 3cotgx = 3 ?

A) $x = \pi/4$; B) para todo $x \in (0, \pi/2)$; C) Para nenhum valor de x ; D) para todo valor de $x \neq n\ \pi/2$ onde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; E) Apenas para x no 3º quadrante.

19. Dispomos de seis côres diferentes . Cada face de um cubo será pintada com uma côr diferente, de forma que as seis côres sejam utilizadas. De quantas maneiras diferentes isto pode ser feito, se uma maneira é considerada idêntica a outra, desde que possa ser obtida a partir desta por rotação do cubo ?

A) 30 ; B) 12 ; C) 36 ; D) 18 ; E) N.d.r.a.

20. A igualdade $\frac{\cos x}{2} = \cos \frac{x}{2}$ é verificada para :

A) Para qualquer valor de x

B) Para qualquer valor de $x \neq n\frac{\pi}{2}$ onde $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

C) Para $x > 2 \text{ arc } \cos \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$. D) Para nenhum valor de x .

E) Para $x = 2 \text{ arc } \cos (\cos 60 - \cos 30)$.

21. A equação {sen (cos x)} {cos (cos x)} = 1 é satisfeita para

A) $x = \pi/4$; B) $x = 0$;

C) nenhum valor de x ; D) todos os valores de x ;

E) todos os valores de x pertencentes ao 3º quadrante .

22. Cortando-se um determinado prisma triangular, reto, por um plano α que forma um angulo de 45º com o plano da base ABC observamos que a reta r, intersecção de α com o plano da base, dista 7 cm de A, 5 cm de B e 2 cm de C.
Se a área da base for 21 cm^2, o volume do tronco de prisma compreendido entre a base ABC e o plano α será :

A) 105 cm^3 ; B) 294 cm^3 ; C) 98 cm^3 ; D) $98\sqrt{2}$ cm^3 ;

E) $\dfrac{98}{\sqrt{2}}$ cm^3 .

23. Seja n um número inteiro $n > 1$ e $x \in (0, \pi/2)$,
Qual afirmação abaixo é sempre verdadeira ?

A) $(1 - \text{sen } x)^n \geq 1 - n \text{ sen } x$; B) $(1 - \text{sen } x)^n \geq 1 - n \text{ sen } x$ para apenas n par ; C) $(1 - \text{sen } x)^n \leq 1 - n \text{ sen} x$;

D) $(1 - \text{sen } x)^n \leq 1 - n \cos x$; E) N.d.r.a.

24. Seja $x \in (0, \pi/2)$.
Qual afirmação abaixo é verdadeira ?

A) $\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} \leq 1$; B) $\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} \leq 2$

C) $\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} \geq 2$; D) $\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} = 2$

E) N.d.r.a.

25. Qual é o maior número de partes em que um plano pode ser dividido por n linhas retas ? (Sugestão: usar indução finita).

A) n^2 ; B) $n(n + 1)$; C) $\dfrac{n(n + 1)}{2}$; D) $\dfrac{n^2 + n + 2}{2}$

E) N.d.r.a.

ITA-MAT-1971

BOTELHO

(1)

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & -6 \\ 3-4 & 6-1 & -3-5 & 9+6 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

VAMOS SUBSTITUIR A 2ª LINHA PELA SOMA DA 2ª LINHA COM A 1ª LINHA

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & -5 & 9 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

VAMOS SUBSTITUIR A 3ª LINHA PELA DIFERENÇA ENTRE A 3ª LINHA E A 4ª LINHA

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & -5 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

VAMOS SUBSTITUIR A 4ª LINHA PELA DIFERENÇA ENTRE A 4ª LINHA E A 1ª LINHA

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & -5 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \end{vmatrix}$$

VAMOS TROCAR A 1ª E A 2ª COLUNAS

$$-\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -6 \\ 6 & 3 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \end{vmatrix}$$

VAMOS APLICAR A REGRA DE CHIÓ

$$-\left|\begin{array}{c|ccc} 1 & 4 & 3 & -6 \\ \hline 6 & 3 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \end{array}\right| =$$

$$= -\begin{vmatrix} 3-6\cdot4 & -5-6\cdot3 & 9-6\cdot(-6) \\ 1-4\cdot0 & 0-3\cdot0 & -2-(-6)\cdot0 \\ 0-4\cdot0 & -1-3\cdot0 & 11-(-6)\cdot0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -21 & -23 & 45 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 11 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left(-45-(-21)\cdot(-2)(-1)-(-23)\cdot 11\right) =$$

$$= -\left(-45+42+253\right) = -250$$

$$-250 = \underbrace{3\cdot(-83)}_{-249} - 1 = \underbrace{3\cdot(-84)}_{-252} + 2 \uparrow$$

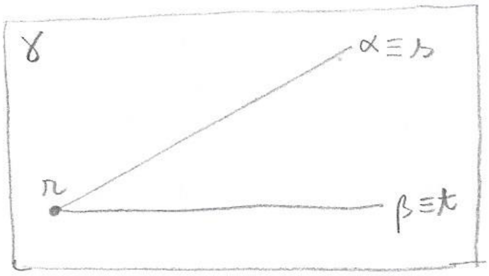
RESTO = 2 → NDRA //

E //

EQUIPE, FME, BAHIENSE = E

PLANCK, VETOR = A (?)

(2) VISTA DE PERFIL



A) ERRADA, PORQUE r, s E t SÓ FORMARIAM 8 TRIEDROS TRIRRETÂNGULOS SE s TAMBÉM FOSSE $\perp$ A t

B) CERTA, PORQUE P É A INTERSEÇÃO DE r COM γ. QUALQUER RETA DE γ QUE PASSE POR P É $\perp$ A r

C) ERRADA, PORQUE r INTERCEPTA γ ($r \perp \gamma$)

D) ERRADA, PORQUE t NÃO É $\perp$ A α

B//

(3) $-\sqrt{3}, 3, -3\sqrt{3}, 9, -9\sqrt{3}, 27, -27\sqrt{3}, 81, -81\sqrt{3}$

$-3^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{2}{2}}, -3^{\frac{3}{2}}, 3^{\frac{4}{2}}, -3^{\frac{5}{2}}, 3^{\frac{6}{2}}, -3^{\frac{7}{2}}, 3^{\frac{8}{2}}, -3^{\frac{9}{2}}$

PRODUTO TEM SINAL (−)

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \dots + \frac{9}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9(9+1)}{2} = \frac{45}{2}$$

PRODUTO $= -\sqrt{3^{45}}$ //

AS OPÇÕES ERAM:

A) $-\sqrt{3^{25}}$ B) $-\sqrt{3^{42}}$ C) $-\sqrt{5 \cdot 3^{9}}$ D) $-\sqrt{3^{45}}$ E) NDRA

D//

(4) $f(x) = x^2$

$f(x^2+y^2) = (x^2+y^2)^2 =$

$= x^4 + 2x^2y^2 + y^4$

$f(x^2) = x^4 \therefore f(f(x)) = x^4$

$2x^2y^2 = 2f(x)f(y)$

$f(y^2) = y^4 \therefore f(f(y)) = y^4$

$\underline{f(f(x))} + f(f(y)) + 2f(x)f(y)$ //

D//

(5) $24x^5 - 4x^4 + 49x^3 - 2x^2 + x - 29 = 0$

TEOREMA DAS RAÍZES RACIONAIS p/q

p É DIVISOR DE 29 $\rightarrow \pm 1, \pm 29$

q É DIVISOR DE 24 $\rightarrow \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6$
$\pm 8, \pm 12, \pm 24$

NENHUMA DAS OPÇÕES É $\pm \frac{1}{q}$ OU $\pm \frac{29}{q}$

E//

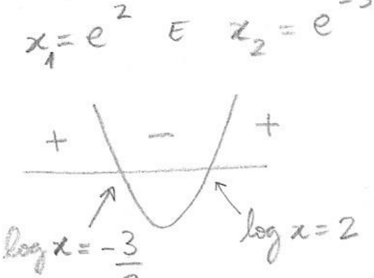
(6) $2(\log x)^2 - \log x - 6 > 0$

$y = \log x \therefore 2y^2 - y - 6 > 0$

$y = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{4} = \dfrac{1 \pm 7}{4} \nearrow 2 \quad \searrow -\frac{3}{2}$

$\log x = \ln x$ (INSTRUÇÃO 14 DA CAPA)

$x_1 = e^2$ E $x_2 = e^{-3/2}$



$\log x < -\frac{3}{2}$

OU

$\log x > 2$

CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA $\rightarrow x > 0$

$0 < x < e^{-3/2}$ $\underline{\underline{\text{OU}}}$ $x > e^2$ //

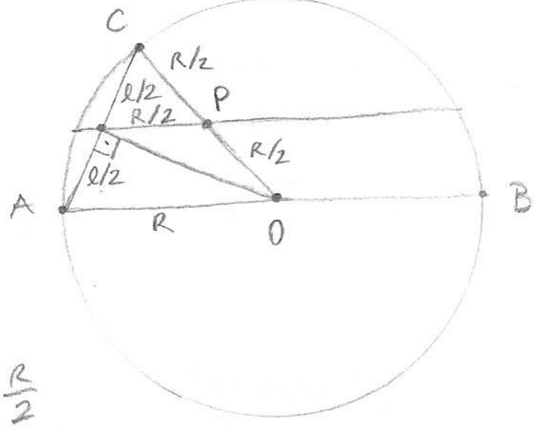
E//. (EQUIPE, BAHIENSE, PLANCK, VETOR)

ITA - MAT - 1971

BOTELHO

(continuação)

(7)



$OP = \frac{R}{2}$

CIRCUNFERÊNCIA DE RAIO $\frac{R}{2}$ E CENTRO O //

C //   BAHIENSE, PLANCK, VETOR = C

EQUIPE = E (?)

(8) $(\log(\text{sen}\, x))^2 - \log(\text{sen}\, x) - 6 = 0$

$y = \log(\text{sen}\, x) \therefore y^2 - y - 6 = 0$

SOMA = 1 $\therefore$ PRODUTO = -6

$y_1 = -2 \therefore y_2 = 3 \therefore \log x = \ln x$ (CAPA)

$\log(\text{sen}\, x_1) = -2 \therefore \text{sen}\, x_1 = e^{-2}$

$x_1 = \text{arc sen}\left(\frac{1}{e^2}\right)$ //

$\log(\text{sen}\, x_2) = 3 \therefore \text{sen}\, x_2 = e^3$ (NÃO)

D //

PLANCK $\rightarrow x = k\pi + (-1)^k \text{arc sen}\left(\frac{1}{e^2}\right)$

(9) $\frac{1}{q}, 1, q \rightarrow$ POSITIVOS

$\frac{1}{q} + 1 + q = m > 0 \quad (\cdot q)$

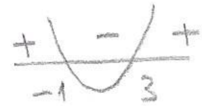
$1 + q + q^2 = mq \therefore q^2 + (1-m)q + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$

$(1-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \geq 0$

$1 - 2m + m^2 - 4 \geq 0 \therefore m^2 - 2m - 3 \geq 0$

SOMA = 2 $\therefore$ PRODUTO = $-3 \therefore 3$ e -1



$m \leq -1$ OU $m \geq 3$

$\downarrow$

NÃO, PORQUE $m > 0$

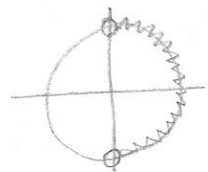
$m \geq 3$ //

C //

(10) $\log(\cos x) = \text{tg}\, x$

$\log x = \ln x$ (CAPA)

CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA $\rightarrow \cos x > 0$

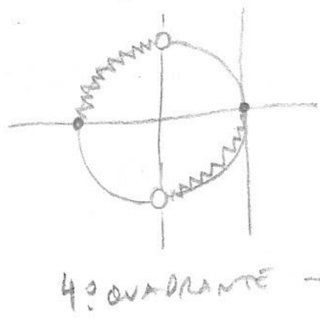


1º ou 4º QUADRANTES

$\cos x = e^{\text{tg}\, x}$

$0 < \cos x \leq 1 \therefore 0 < e^{\text{tg}\, x} \leq 1$

$\text{tg}\, x \leq 0$



2º ou 4º QUADRANTES

4º QUADRANTE $\rightarrow \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$ //

A //   FME = A

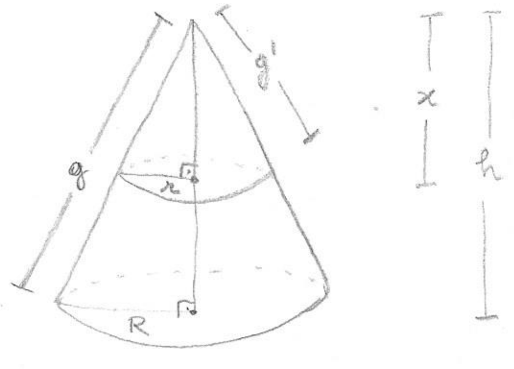
EQUIPE, BAHIENSE, VETOR = E

ZERO É SOLUÇÃO...

$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq 2k\pi$ ...

PLANCK = D (?)

(11)



$$S_{\text{SEÇÃO}} = \pi r^2$$

$$S_{\substack{\text{LATERAL}\\ \text{TRONCO}}} = \underbrace{S_{\substack{\text{LATERAL}\\ \text{CONE}\\ \text{MAIOR}}}}_{\to S} - \underbrace{S_{\substack{\text{LATERAL}\\ \text{CONE}\\ \text{MENOR}}}}_{\to S'}$$

$2\pi R$

$$2\pi \,—\, \pi g^2 \qquad \theta \,—\, S \qquad \Big\| \quad S = \frac{g^2\theta}{2}$$

$$\theta = \frac{2\pi R}{g} \quad \therefore \quad S = \pi R g$$

ANALOGAMENTE $S' = \pi r g'$

$$\pi r^2 = \pi R g - \pi r g' \quad \therefore \quad r^2 = Rg - rg'$$

$$\frac{r}{R} = \frac{x}{h} = \frac{g'}{g} \quad \therefore \quad R = \sqrt{g^2 - h^2}$$

$$\frac{R^2x^2}{h^2} = Rg - \frac{Rx}{h} \cdot \frac{gx}{h}$$

$$\left(\frac{R^2}{h^2} + \frac{Rg}{h^2}\right) x^2 = Rg \quad \therefore \quad x^2 = \frac{gh^2}{R+g}$$

$$x^2 = \frac{gh^2}{g + \sqrt{g^2 - h^2}} = \frac{gh^2\left(g - \sqrt{g^2-h^2}\right)}{g^2 - g^2 + h^2}$$

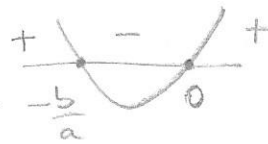
$$x^2 = g\left(g - \sqrt{g^2 - h^2}\right)$$

$$x = \sqrt{g\left(g - \sqrt{g^2-h^2}\right)} \;//$$

B //

(12) $ax^2 + bx \geq 0$

RAÍZES $x = -\frac{b}{a}$ E $x = 0$



$x \leq -\frac{b}{a}$ OU $x \geq 0$

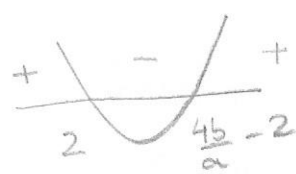
$$\frac{a}{4}x^2 - bx + (2b - a) < 0$$

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot \frac{a}{4}(2b - a)}}{2 \cdot \frac{a}{4}} =$$

$$= \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 2ab + a^2}}{\frac{a}{2}} = \frac{b \pm (a-b)}{\frac{a}{2}} \nearrow 2 \quad \searrow \frac{4b}{a} - 2$$

MAS $\frac{4b}{a} - 2$ PODE SER
- MAIOR OU MENOR QUE 0
- MAIOR OU MENOR QUE 2

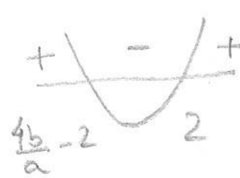
SE $b > a \to \frac{4b}{a} - 2 > 2$



$2 < x < \frac{4b}{a} - 2$

PREVALECE ("A" ERRADA)

SE $b < a \to \frac{4b}{a} - 2 < 2$



$\frac{4b}{a} - 2 < x < 2$

NÃO PODE $x > 2$ ("B" ERRADA)

SE $b > \frac{3a}{4} \to \frac{4b}{a} - 2 > 1$

$$\left.\begin{array}{l} \text{SEJA } 2 < x < \frac{4b}{a} - 2 \\ \text{SEJA } \frac{4b}{a} - 2 < x < 2 \end{array}\right\} x > 1$$

NÃO PODE $0 < x < 1$ ("C" ERRADA)

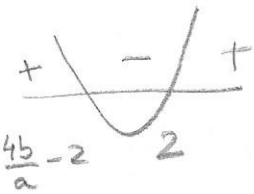
(continua...)

ITA – MAT – 1971

BOTELHO

(continuação)

SE $a > 2b \rightarrow \frac{b}{a} < \frac{1}{2} \rightarrow \frac{4b}{a} - 2 < 0$



$\frac{4b}{a} - 2 < x < 2$

NÃO É SÓ $x > \frac{4b}{a} - 2$

("D" ERRADA)

NENHUMA ESTÁ CERTA

E

---

(13) $\log\frac{1}{2} + \log\frac{1}{4} + \ldots + \log\frac{1}{2^m} =$

$= \log\left(\frac{1}{2^1}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2^m}\right) = \log\left(\frac{1}{2^{\frac{m(m+1)}{2}}}\right) =$

$= \log 1 - \log 2^{\frac{m(m+1)}{2}} = m(m+1)\cdot\left(-\log 2^{\frac{1}{2}}\right) =$

$= (m+m^2)\log 2^{-\frac{1}{2}} = (m+m^2)\log\sqrt{\frac{1}{2}}$

B

---

(14) MATRIZ DE VANDERMONDE

$\det(A) = \det(A^t)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-x & b-x & c-x \\ a^2-x^2 & b^2-x^2 & c^2-x^2 \\ a^3-x^3 & b^3-x^3 & c^3-x^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a-x)(b-x)(c-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+x & b+x & c+x \\ a^2+ax+x^2 & b^2+bx+x^2 & c^2+cx+x^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b+x-(a+x) & c+x-(a+x) \\ b^2+bx+x^2- & c^2+cx+x^2- \\ -(a^2+ax+x^2) & -(a^2+ax+x^2) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b^2-a^2)+(b-a)x & (c^2-a^2)+(c-a)x \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a+x & c+a+x \end{vmatrix} =$$

$= (b-a)(c-a)(c+a+x-b-a-x) =$

$= (b-a)(c-a)(c-b)$

$\det = \underline{(a-x)}(b-x)(c-x)(b-a)(c-a)(c-b)$

O RESTO DA DIVISÃO POR $(x-a)$ É ZERO

D

(15) $P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x)$

$$x^3 + x^2 + x + 1 = Q(x) \cdot (1+x) + x + 1$$

$$Q(x) = \frac{x^3 + x^2}{1+x} = \frac{x^2(x+1)}{1+x} = x^2$$

$Q(x) = 0$ SÓ PARA $x = 0$

$Q(2) = 4 \therefore Q(3) = 9 \therefore Q(0) = 0$

$Q(1) = 1 \neq 0$ //

D //

(16) $P(x)$ É POLINÔMIO DE GRAU 100 COM 100 RAÍZES IGUAIS A $-9 \rightarrow P(x) = a_{100}(x+9)^{100}$

COMO $a_{100} = 1$, $P(x) = (x+9)^{100}$

BINÔMIO DE NEWTON

TERMO GERAL $T_{p+1} = \binom{m}{p} a^{m-p} b^p$

$$T_{p+1} = \binom{100}{p} x^{100-p} \cdot 9^p$$

$100 - p = 2 \therefore p = 98$

$$T_{99} = \binom{100}{98} x^2 \cdot 9^{98}$$

$$a_2 = \frac{100!}{98!\,2!} \cdot 9^{98} = \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 9^{98} = 50 \cdot 99 \cdot 9^{98}$$ //

A //

(17) $4^x - (\log t + 3)2^x - \log t = 0$

CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA $\rightarrow t > 0$

$y = 2^x \therefore y^2 = 4^x$

$y^2 - (\log t + 3)y - \log t = 0$

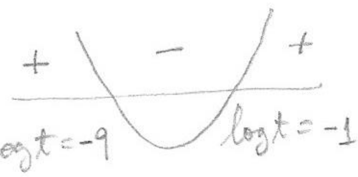
DUAS RAÍZES REAIS E DISTINTAS

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$

$(\log t + 3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\log t) > 0$

$(\log t)^2 + 6 \log t + 9 + 4 \log t > 0$

$(\log t)^2 + 10 \log t + 9 > 0$ SOMA $= -10$ PRODUTO $= 9$



$\log t < -9$ OU $\log t > -1$

$\log x = \ln x$ (CAPA)

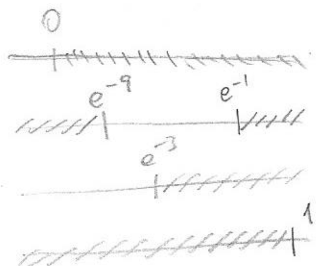
$t < e^{-9}$ OU $t > e^{-1}$

ALÉM DISSO, COMO $y = 2^x > 0$, ENTÃO

$2^{x_1} + 2^{x_2} = \log t + 3 > 0 \therefore \log t > -3 \therefore t > e^{-3}$

$2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = -\log t > 0 \therefore \log t < 0 \therefore t < 1$

INTERSEÇÃO $\rightarrow$



$e^{-1} < t < 1$ //

C //

ITA – MAT – 1971

BOTELHO

(continuação)

(18) $\operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x = 3$

$$\operatorname{tg} x + \frac{3}{\operatorname{tg} x} = 3$$

$$y = \operatorname{tg} x \quad \therefore \quad y + \frac{3}{y} = 3 \quad \therefore \quad y^2 + 3 = 3y$$

$$y^2 - 3y + 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 9 - 12 = -3 < 0$$

$$y_{mín} = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2}$$

$$f(y)_{mín} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{3}{4}$$

NÃO HÁ NENHUMA SOLUÇÃO REAL //

C //

(19) 1ª SOLUÇÃO

VAMOS PINTAR UMA FACE QUALQUER DE AZUL. ISSO NÃO ENTRA NA CONTA PORQUE UMA FACE QUALQUER JÁ SERIA AZUL.

VAMOS ESCOLHER A COR DA FACE OPOSTA. ISSO PODE SER FEITO DE 5 MODOS.

RESTA ESCOLHER AS CORES DAS 4 FACES LATERAIS. MAS ISSO É UMA PERMUTAÇÃO CIRCULAR PORQUE, GIRANDO O CUBO EM TORNO DO EIXO QUE CONTÉM AS DUAS FACES OPOSTAS JÁ COLORIDAS, VERIFICAMOS QUE 4 SEQUÊNCIAS (1234, 2341, 3412 E 4123) SÃO EQUIVALENTES.

A PERMUTAÇÃO CIRCULAR DE m É $(m-1)!$

LOGO, HÁ $(4-1)! = 6$ MODOS DE ESCOLHER AS CORES DAS 4 FACES

TOTAL $= 5 \times 6 = 30$ //

2ª SOLUÇÃO

A 1ª FACE PODE TER 6 CORES

A 2ª FACE PODE TER 5 CORES ...

A 6ª FACE PODE TER 1 COR

O TOTAL POSSÍVEL É $6! = 720$

SE A COR 1 ESTIVER NA FACE 1 E GIRARMOS O CUBO, HÁ 4 CONFIGURAÇÕES IGUAIS

ISSO OCORRE PARA AS 6 CORES

LOGO, $\dfrac{720}{4 \cdot 6} = \dfrac{720}{24} = 30$ //

A //

(20) $\dfrac{\cos x}{2} = \cos \dfrac{x}{2} \quad \therefore \quad \cos x = 2 \cos \dfrac{x}{2}$

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 2 \cos \frac{x}{2}$$

$$y = \cos \frac{x}{2} \quad \therefore \quad 2y^2 - 2y - 1 = 0$$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

MAS $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} > 1 \Rightarrow$ NÃO

$$y = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \quad \cos \frac{x}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \arccos\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \quad \therefore \quad x = 2 \arccos\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x = 2 \arccos\left(\cos 60° - \cos 30°\right)$$ //

E //

(21) $\operatorname{sen}(\cos x) \cdot \cos(\cos x) = 1$

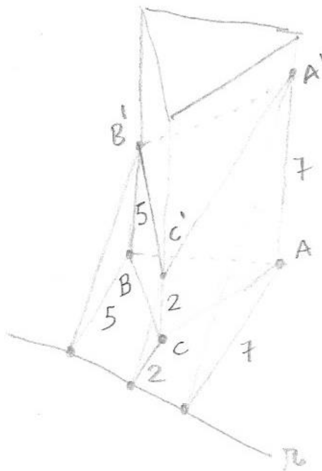
$2 \operatorname{sen}(\cos x) \cdot \cos(\cos x) = 2$

$\operatorname{sen}(2 \cos x) = 2$

NÃO HÁ SOLUÇÃO REAL //

C //

(22)



$$V_{ABCA'B'C'} = S_{ABC}\left(\frac{AA' + BB' + CC'}{3}\right) =$$

$$= 21 \cdot \left(\frac{7+5+2}{3}\right) = \frac{21 \cdot 14}{3} =$$

$$= 7 \cdot 14 = 98 \text{ cm}^3 //$$

C //

(23) INDUÇÃO FINITA

$n=2 \rightarrow (1-\operatorname{sen} x)^2 = 1 - 2\operatorname{sen} x + \underbrace{\operatorname{sen}^2 x}_{>0} > 1 - 2\operatorname{sen} x$

PARA $n \rightarrow (1-\operatorname{sen} x)^n \geq 1 - n \operatorname{sen} x$

PARA $n+1 \rightarrow (1-\operatorname{sen} x)^{n+1} = (1-\operatorname{sen} x)^n (1-\operatorname{sen} x) \geq$

$\geq (1 - n\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x) = 1 - n\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x + \underbrace{n\operatorname{sen}^2 x}_{>0} \geq$

$\geq 1 - (n+1)\operatorname{sen} x$

A //

(24) $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} =$

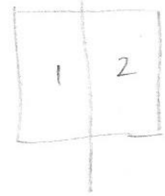
$= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} = \frac{2}{2 \operatorname{sen} x \cos x} =$

$= \frac{2}{\operatorname{sen} 2x} \geq 2$ PORQUE $0 < \operatorname{sen} 2x < 1$

$2x \in (0, \pi)$

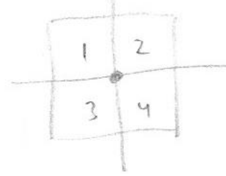
C //

(25) 1 RETA → 2 PARTES



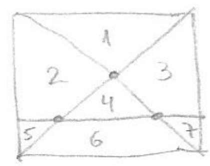
+ VERTICAL → 1x2 (+1)

2 RETAS → 4 PARTES

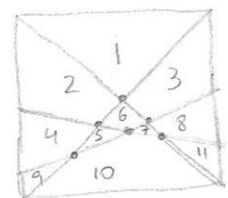


+ HORIZONTAL → 2x2 (+2)

3 RETAS → 7 PARTES



4 RETAS → 11 PARTES



TODAS AS RETAS DEVEM SE INTERCEPTAR

QUANDO COLOCAMOS A n^a RETA, CRIAMOS

n PARTES → $f(n) = f(n-1) + n$

$\Delta f(n) = n$ → $f(n)$ É DE GRAU 2

$f(n) = an^2 + bn + c$

$$\begin{cases} f(1) = a + b + c = 2 \\ f(2) = 4a + 2b + c = 4 \\ f(3) = 9a + 3b + c = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 3a + b = 2 \\ 5a + b = 3 \end{cases}$$

$2a = 1 \therefore a = 1/2 \therefore b = 2 - 3a = 1/2 \therefore c = 2 - a - b = 1$

$f(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2}$ //

D //