CENTRO TÉCNICO DE AERONÁUTICA

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

CONCURSO DE ADMISSÃO DE 1965 - PROVA DE MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES:

A prova consta de duas partes: uma de testes e outra de problemas.

Não é permitido o uso de tabelas, apontamentos, formulários, nem de outros papeis a não ser os fornecidos pelo agente fiscal.

Testes: São testes de tríplice escolha. Assinale com um X o quadrado que corresponde à afirmação que você considera correta. Não responda questões sobre as quais você tenha dúvidas pois 2 respostas erradas anulam 1 resposta certa.

Problemas: Logo em seguida ao enunciado de cada problema existe um espaço em branco no qual êle deve ser resolvido. O agente fiscal fornecerá papel para rascunho, o qual não será considerado na correção da prova.

Duração da prova: 3 horas.

Cidade:______________________________ Estado:________________

Data:______________________ Nº (a cargo do fiscal):__________

Cidade:______________________________ Estado:________________

Data:______________________ Nº (a cargo do fiscal):__________

NOME:(legível):____

Assinatura:____

PRIMEIRA PARTE: TESTES

1) São dadas 3 retas distintas r, s, t, no espaço. O problema de determinar uma reta paralela a r e que encontre s e t

   a) tem sempre solução única .... ☐

   b) tem sempre solução que pode ser única ou não, dependendo das posições das retas .... ☐

   c) tem solução ou não, dependendo das posições das retas .... ☐

2) O número de todas as diagonais de um octógono é dado pela fórmula

   a) $C_n^2 - n$, $n = 8$ .... ☐

   b) C_{n+1}^2 , $n = 8$ .... ☐

   c) $2n - n/2$, $n=8$ .... ☐

   Nota: C_n^p significa o número de combinações simples de n elementos p a p.

3) O trinômio $-x^2 + 3x - 4$

   a) é positivo para todo número real x .... ☐

   b) é negativo para todo número real x .... ☐

   c) muda de sinal quando x percorre o conjunto de todos os números reais .... ☐

4) $P(x)$ é um polinômio de 5º grau e 1, 3 e 5 são raizes da equação $P(x) = 0$. Se $Q(x) = x^2 - 4x + 3$ então a fração $P(x)/Q(x)$ é

   a) um polinômio .... ☐

Scanned by CamScanner

b) um polinômio de 2º grau .... ☐

c) negativa para valores de x compreendidos entre as raizes de $Q(x) = 0$ .... ☐

5) A intersecção de um plano P com as faces de um diedro (P não paralelo à aresta do diedro) determina um ângulo a que

a) é menor que o ângulo diedro se P não for perpendicular à aresta do diedro .... ☐

b) é maior que o ângulo diedro se P não for perpendicular à aresta do diedro .... ☐

c) pode ser igual, maior ou menor que o ângulo diedro. ☐

6) A equacão $a^{-x} + 1 = 0$ (a positivo),

a) pode ser resolvida com auxílio de logarítmos na base a .... ☐

b) não tem solução real .... ☐

c) pode ser resolvida com logarítmos em qualquer base. ☐

7) Se um sistema homogêneo de equações lineares tiver o determinante igual a zero, então

a) o sistema é indeterminado .... ☐

b) o sistema tem solução única .... ☐

c) o sistema não tem solução .... ☐

8) A equação trigonométrica $\cos^2 x - 5\cos x + 6 = 0$

a) tem solução real .... ☐

b) não tem solução real .... ☐

c) tem solução entre 0 e $\pi/4$ .... ☐

9) $|x| + |y| = 1$ representa

a) uma reta .... ☐

b) quatro retas .... ☐

c) um quadrado (quadrilátero) .... ☐

SEGUNDA PARTE: PROBLEMAS

1) Dentro de um quadrado de lado a existem cinco círculos não superpostos de mesmo ráio r. O centro de um dos círculos coincide com o centro do quadrado e êle tangencia os outros quatro círculos cada um dos quais tangencia dois lados do quadrado (cada um está num canto do quadrado). Exprimir r em termos de a.

2) Dado um triângulo equilátero e sabendo-se que existe outro triângulo equilátero inscrito com os lados respectivamente perpendiculares aos do primeiro, calcular a relação entre as áreas dos dois triângulos.

3) Adicionando-se 100 a um número natural n , obtemos um quadrado perfeito; adicionando-se 168 a n , obtemos outro quadrado perfeito. Qual é o número n ?

4) Considere os inteiros de 1 até 10.000.000.000 .

a) Em quantos dêles usamos o algarismo 1 em sua representação ?

b) Em quantos dêles o algarismo 1 não ocorre na representação?

c) Qual o maior, o número daqueles em que entra o 1 em sua representação, ou o número daqueles em que não entra o algarismo 1 ?

Nota: $\log 9 = 0{,}9542$ $\log 3{,}49 = 0{,}542$

$\log 2 = 0{,}3010$

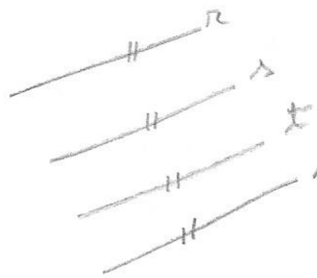
ITA - MAT - 1965

BOTELHO

1ª PARTE - TESTES DE TRÍPLICE ESCOLHA

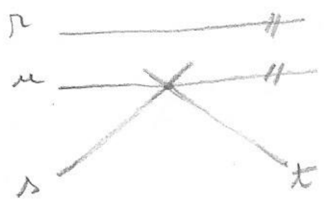
(2 ERROS ANULAM 1 ACERTO)

① SE r, s E t SÃO PARALELAS, O PROBLEMA NÃO TEM SOLUÇÃO



μ NÃO ENCONTRA s NEM t

SE s E t SÃO CONCORRENTES, POR EXEMPLO, TEM SOLUÇÃO



O PROBLEMA TEM SOLUÇÃO OU NÃO, DEPENDENDO DAS POSIÇÕES DAS RETAS //

C //

② O NÚMERO DE DIAGONAIS DE UM POLÍGONO PODE SER DADO POR $\frac{m(m-3)}{2}$ (DE CADA VÉRTICE SAEM $m-3$; MULTIPLICA POR m PORQUE SÃO m VÉRTICES; DIVIDE POR 2 PORQUE $V_iV_j = V_jV_i$)

MAS TAMBÉM PODE SER $C_m^2 - m$ (CONTAMOS TODOS SEGMENTOS QUE LIGAM DOIS VÉRTICES E SUBTRAÍMOS OS LADOS)

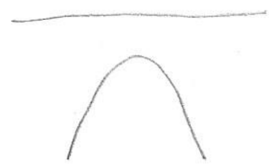
$$\frac{m(m-1)}{2} - m = \frac{m^2-m}{2} - m = \frac{m^2-3m}{2} = \frac{m(m-3)}{2}$$

A //

③ $P(x) = -x^2+3x-4$

$\Delta = b^2-4ac = 9-4(-1)(-4) = 9-16 = -7 < 0$

NÃO HÁ RAÍZES REAIS E $a = -1 < 0$



$P(x)$ É NEGATIVO PARA TODO REAL x //

B //

④ $P(x) = (ax^2+bx+c)(x-1)(x-3)(x-5)$

$Q(x) = (x-1)(x-3)$

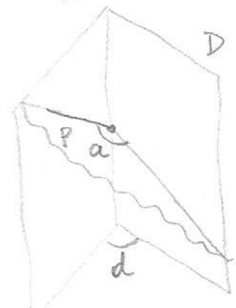
$P(x)/Q(x) = (ax^2+bx+c)(x-5)$

É UM POLINÔMIO DE 3º GRAU

NADA SE PODE AFIRMAR SOBRE O SINAL ENTRE $x=1$ E $x=3$

A //

⑤ $a > d$



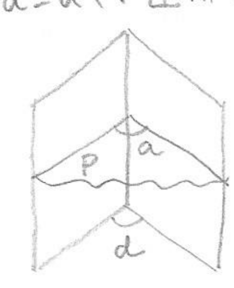
D = DIEDRO

P = PLANO

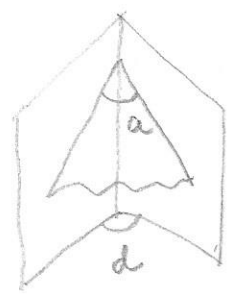
a = ÂNGULO DA INTERSEÇÃO

d = ÂNGULO DIEDRO

$a = d$ ($P \perp$ ARESTA)



$a < d$



a PODE SER IGUAL, MAIOR OU MENOR QUE O DIEDRO //

C //

⑥ $a^{-x}+1=0 \qquad (a>0)$

$\frac{1}{a^x}+1=0 \therefore \frac{1}{a^x}=-1 \therefore a^x=-1$

NÃO TEM SOLUÇÃO REAL//

B//

⑦ PELA REGRA DE CRAMER, $x_i=\frac{\Delta i}{\Delta}$

SE $\Delta=0$ E $\Delta_i\neq 0$, O SISTEMA É IMPOSSÍVEL

SE $\Delta=0$ E $\Delta i=0$, O SISTEMA É INDETERMINADO

NO SISTEMA HOMOGÊNEO, TODOS OS TERMOS LIVRES SÃO NULOS E $\Delta i=0$

LOGO, O SISTEMA É INDETERMINADO//

A//

⑧ $\cos^2 x-5\cos x+6=0$

SOMA = 5 ∴ PRODUTO = 6

$\cos x=2$ (impossível)

OU

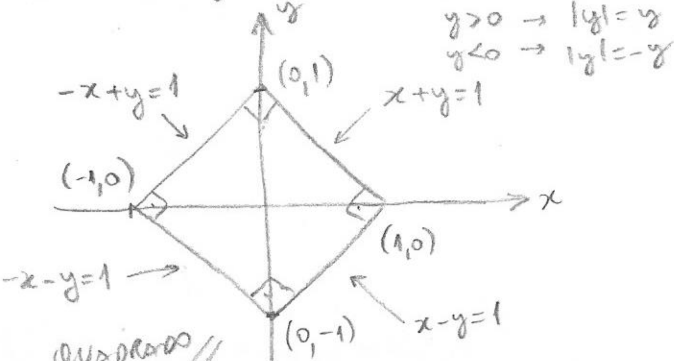
$\cos x=3$ (impossível)

NÃO TEM SOLUÇÃO REAL//

B//

⑨ $|x|+|y|=1$

$x>0 \rightarrow |x|=x$
$x<0 \rightarrow |x|=-x$
$y>0 \rightarrow |y|=y$
$y<0 \rightarrow |y|=-y$

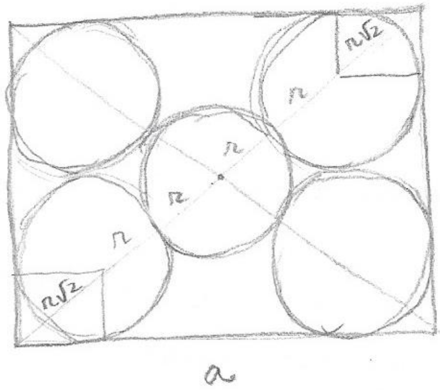


QUADRADO//

C//

2ª PARTE – PROBLEMAS

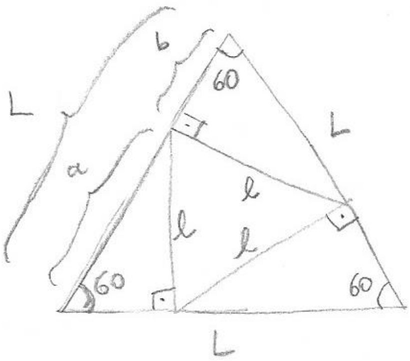
①



$a\sqrt{2}=4r+2r\sqrt{2} \therefore r=\frac{a\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}$

$r=\frac{a\sqrt{2}(4-2\sqrt{2})}{16-8}=\frac{a(4\sqrt{2}-4)}{8}=\frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$//

②



$\operatorname{sen} 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{l}{a}$

$\operatorname{tg} 60^\circ=\sqrt{3}=\frac{l}{b}$

$L=a+b=$

$=\frac{2l}{\sqrt{3}}+\frac{l}{\sqrt{3}}=l\sqrt{3}$

$\frac{S_{MAIOR}}{S_{MENOR}}=\frac{L^2\sqrt{3}/4}{l^2\sqrt{3}/4}=\left(\frac{L}{l}\right)^2=(\sqrt{3})^2=3$//

③ $\left.\begin{array}{l} m+100=x^2 \\ m+168=y^2 \end{array}\right\} \ominus$

$y^2-x^2=68 \therefore (y+x)(y-x)=68$

$\begin{cases} y+x=68 \\ y-x=1 \end{cases} \therefore 2y=69$ NÃO

$\begin{cases} y+x=34 \\ y-x=2 \end{cases} \therefore 2y=36 \therefore y=18 \therefore x=16$

$m=16^2-100=156$//

$\begin{cases} y+x=17 \\ y-x=4 \end{cases} \therefore 2y=21$ NÃO

ITA - MAT - 1965

BOTELHO

(continuação)

(4) a) TOTAL $= 10^{10}$ INTEIROS

O Nº DE INTEIROS QUE USAM O ALGARISMO 1 É O TOTAL MENOS O Nº DE INTEIROS QUE NÃO USAM O ALGARISMO 1

NÃO USAM 1: $\emptyset$ _|_ _ _|_ _ _|_ _ _

CADA ESPAÇO PODE SER PREENCHIDO COM 0, 2, 3, ... 9 (9 ALGARISMOS) $\rightarrow 9^{10}-1$ (TIRA ZERO)

$$10^{10} - 9^{10} + 1$$

b) $9^{10} - 1$

c) QUEM É MAIOR? $10^{10} - 9^{10} + 1$ OU $9^{10} - 1$?

SE $9^{10} >$ METADE DE 10^{10}, ENTÃO $9^{10}-1$ É MAIOR
$(<)$ (MENOR)

(VAMOS DESPREZAR A INFLUÊNCIA DE ± 1)

$x = 9^{10} \therefore \log x = 10 \cdot \log 9 = 10 \cdot 0{,}9542$
$= 9{,}542$

$y = 10^{10}/2 \therefore \log y = \log 10^{10} - \log 2$
$\log y = 10 \log 10 - \log 2$
$\log y = 10 - 0{,}3010$
$\log y = 9{,}699$

$9{,}542 < 9{,}699 \therefore \log x < \log y \therefore x < y$

$9^{10} < 10^{10}/2 \therefore 2 \cdot 9^{10} < 10^{10} \therefore 9^{10} < 10^{10} - 9^{10}$

O MAIOR É O Nº DAQUELES EM QUE ENTRA O "1"

OUTRA MANEIRA

$x = 9^{10} \therefore \log x = 10 \log 9 = 9{,}542$

$x = 10^{9{,}542} = 10^{9} \cdot 10^{0{,}542} = 3{,}49 \cdot 10^{9}$

$3{,}49 \cdot 10^{9} < 5 \cdot 10^{9} = \dfrac{10^{10}}{2}$