CENTRO TÉCNICO DE AERONÁUTICA

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

CONCURSO DE ADMISSÃO DE 1960 - EXAME DE MATEMÁTICA

Reservado ao Examinador
Nota:..................

INSTRUÇÕES GERAIS:

O candidato encontrará a seguir os dez problemas do exame. Deve resolve-los nas folhas que para isso lhe serão fornecidas. Pode usar qualquer página como rascunho. Os rascunhos não serão levados em conta, salvo para verificação de que cálculos omitidos tenham sido efetivamente feitos. Não importa a ordem em que as soluções sejam dadas mas o candidato indicará de modo bem visível o número da questão que aborda. Não é permitido uso de tabelas, apontamentos, formulários etc...

Tempo de duração do exame: 4 horas.

Cidade.........................., Data............., Nº ....
(A cargo do Fiscal)

Cidade ...., Data.............Nº.....................
(A cargo do Fiscal)

Nome (legível) ....

Assinatura ....

FOLHA DE QUESTÕES

1) Verifique se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

Se $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$; $\alpha > 0$ e $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha^n = 0$; $|\alpha| < 1$

então podemos concluir que:

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left\{ \sqrt[n]{\alpha} + \alpha^n \right\} = 1$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha^{\frac{1+n^2}{n}} = 0$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha^{\frac{1-n^2}{n}} = 1$

2) Afirmo que $\dfrac{1}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{2(x+1)} + \dfrac{1}{(x-1)}$; isso é verdadeiro ou falso ?

3) Nas linhas que se seguem há o enunciado de um "teorema" e sua "demonstração". Identifique o êrro e estabeleça o resultado correto.

<u>Teorema</u>: Seja $T(x) = ax^2 + bx + c$. Se p e q são números tais que $a.T(p) < 0$ e $a.T(q) > 0$ então $T(x) = 0$ tem duas raizes distintas e p e q estão entre as raizes. Além disso, se $a.T(r) = 0$, r é necessàriamente uma raiz de $T(x) = 0$.

<u>Demonstração</u>: Para $b^2 - 4ac = 0$, os valores de $T(x)$ diferentes de zero terão o sinal de a; para $b^2 - 4ac < 0$, todo valor numérico de $T(x)$ terá sinal igual ao de a. Logo, se $T(x)$ e a têm sinais opostos, só se admite a possibilidade $b^2 - 4ac > 0$. Nêsse caso, entre as raizes é que estarão, necessàriamente, os valores de x que dão a $T(x)$ sinal oposto ao sinal de a. Razão análoga mostra que o número q está entre as raizes. A terceira parte do enunciado é óbvia.

4) Determinar o(s) êrro(s) na "dedução" abaixo.

Seja $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$; nessa hipótese $\cos x < \sec x$ e multiplicando ambos os membros por $\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x$ obtemos

$$\cos x\,(\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x) < \sec x\,(\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x)$$

ou

$$\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x < \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x \sec x$$

para $x = 45^\circ$ teremos:

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 - \frac{2}{\sqrt{2}}$$

e sucessivamente

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{2} - \sqrt{2},$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{2},$$

$$\sqrt{2} < 1.$$

5) Determinar a, b e c de modo que a identidade abaixo seja verificada. a, b e c não são simultaneamente iguais a zero.

$$a(x - 2y + z) + b(x - 3y + 5z) + c(5x - 11y + 9z) \equiv 0$$

6) Demonstrar que se a equação $x^3 + ax + b = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, a e b reais, tiver duas raizes iguais a será sempre positivo.

7) Deduzir a fórmula que dá a área de um triângulo em função dos três lados e aplicá-la para o caso em que os três lados são 3m, 5m e 6m respectivamente.

8) Definir retas paralelas, reta perpendicular a um plano e demonstrar que se duas retas são paralelas todo plano perpendicular a uma delas é também perpendicular à outra.

9) Seja S uma superfície esférica em que se tomam dois pontos, A e B, diametralmente opostos. Seja C um círculo determinado pela intersecção de S com um plano perpendicular a AB. Determinar a área de C sabendo-se que as distâncias de A e B à circunferência de C são respectivamente 6cm e 8cm.

10) Chamamos alturas de um tetraedro às perpendiculares baixadas dos vértices sôbre os planos das faces opostas. Prove que se duas alturas de um tetraedro se encontram, as outras duas alturas também se encontram.