CENTRO TÉCNICO DE AERONÁUTICA

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

EXAME DE ADMISSÃO DE MATEMÁTICA   ANO DE 1950

Duração da prova: 3 horas

1ª Questão

Determine os valores de m para os quais as duas equações

$$mx + 3y + 11 = 0$$

$$3x + my - 9 = 0$$

possuem solução e os valores de m para os quais elas não possuem solução. Quais são as soluções quando $m = 4$?

2ª Questão

Resolva a equação

$$\frac{x-1}{3} - \frac{3x+2}{5x} + 1 = 0$$

3ª Questão

Demonstre que

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

e que

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

4ª Questão

Mostre como construir um quadrado cuja área seja igual à de um dado retângulo.

5ª Questão

As retas HF e GE passam, respetivamente, pelos pontos médios H e F, G e E, dos lados opostos de um quadrilátero plano convexo e IJ é a reta que une os pontos médios I e J das diagonais do quadrilátero. Demonstrar, utilizando os métodos da Geometria Analítica, que as tres retas HF, GE e IJ são concorrentes.

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

EXAME DE ADMISSÃO DE 1950

SOLUÇÕES DAS QUESTÕES DE MATEMÁTICA – BOTELHO

1ª Questão:

$mx + 3y + 11 = 0$

$3x + my - 9 = 0$

Para ser possível e determinado, o determinante principal Δ tem que ser diferente de zero

$\Delta = \begin{vmatrix} m & 3 \\ 3 & m \end{vmatrix} = m^2 - 9 \neq 0$ → $m \neq \pm 3$

Para ser possível e indeterminado, as razões Δ_x/Δ e Δ_y/Δ devem ser da forma 0/0

$\Delta_x = \begin{vmatrix} -11 & 3 \\ 9 & m \end{vmatrix} = -11m - 27 = 0$ → m teria que ser –27/11

$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & -11 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 9m + 33 = 0$ → m teria que ser –33/9 = –11/3

O sistema não tem como ser possível e indeterminado

Para ser impossível, Δ=0, mas Δ_x e Δ_y devem ser diferentes de zero

Isso acontece para $m = \pm 3$

Para m = 4, $\Delta = 4^2 - 9 = 7$, $x = \Delta_x/\Delta = (-11.4-27)/7 = -71/7$ e $y = \Delta_y/\Delta = (9.4+33)/7 = 69/7$

Resposta: sistema possível e determinado para $m \neq \pm 3$ e impossível para $m = \pm 3$. Para m=4, x = –71/7 e y = 69/7

2ª Questão

$\frac{x-1}{3} - \frac{3x+2}{5x} + 1 = 0$ → $x \neq 0$

$\frac{5x(x-1)-3(3x+2)+3.5x}{3.5x} = 0$ → $\frac{5x^2-5x-9x-6+15x}{15x} = 0$ → $5x^2 + x - 6 = 0$

$x = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4.5.(-6)}}{2.5} = \frac{-1\pm\sqrt{121}}{10} = \frac{-1\pm 11}{10} = -\frac{6}{5} \ ou \ 1$

Resposta: x = –6/5 ou x = 1

3ª Questão

1ª parte

$\cos(x+y) = \cos x.\cos y - \operatorname{sen}x.\operatorname{sen}y$

Se x=y, então $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x.\cos x - \operatorname{sen}x.\operatorname{sen}x = \cos^2x - \operatorname{sen}^2x$

Mas $\operatorname{sen}^2x = 1 - \cos^2x \quad \rightarrow \quad \cos(2x) = \cos^2x - (1 - \cos^2x) = 2\cos^2x - 1$

2ª parte

$tg(x+y) = (tgx+tgy)/(1-tgx.tgy)$

Se x=y, então $tg(2x) = tg(x+x) = (tgx+tgx)/(1-tgx.tgx) = 2.tgx/(1-tg^2x)$

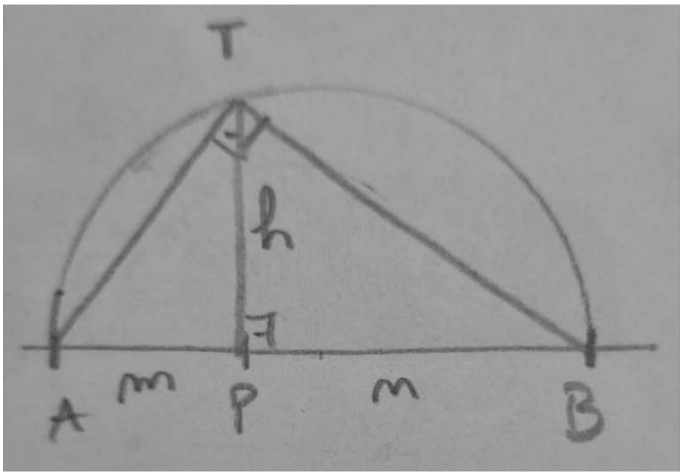
4ª Questão

Desejamos construir um quadrado com a mesma área de um retângulo dado (quadratura do retângulo)

Se o retângulo tiver lados "a" e "b", dados, o quadrado com área equivalente tem lado ℓ tal que $\ell^2 = a.b$

Assim, ℓ é a média geométrica entre "a" e "b"

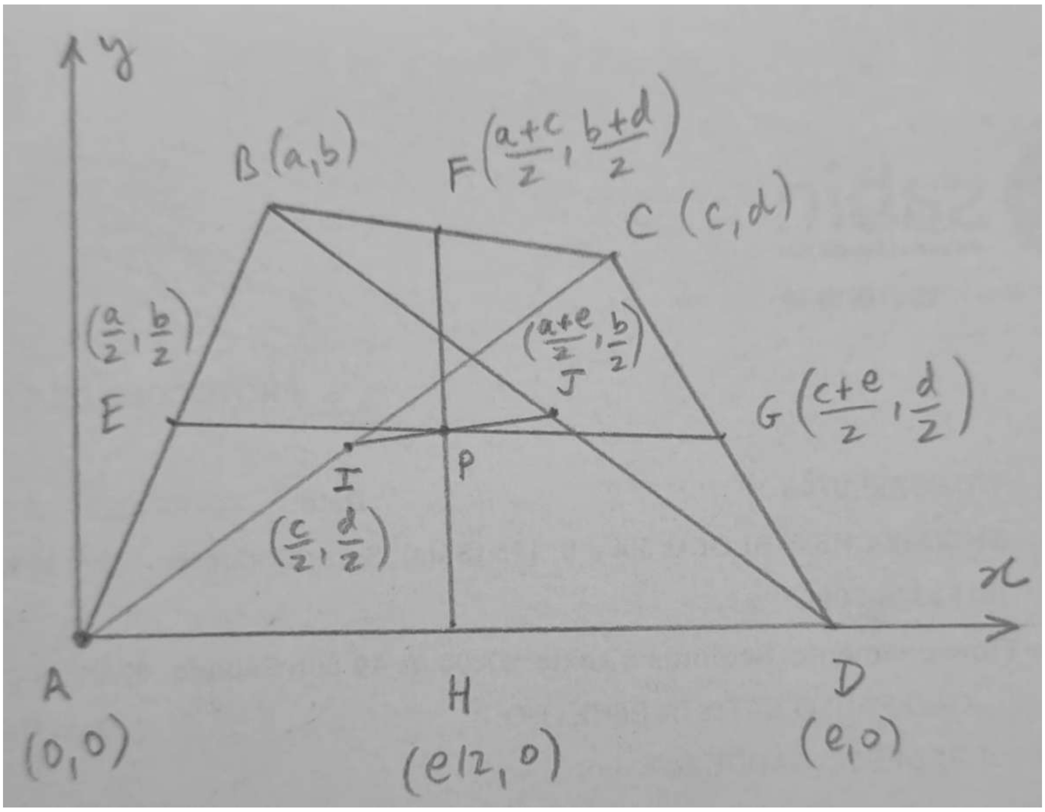
Podemos determinar ℓ graficamente usando a propriedade $h^2 = m.n$ dos triângulos retângulos



Em uma reta suporte, marcamos, a partir de um ponto P, o comprimento "a" para a esquerda e o comprimento "b" para a direita. Traçamos a semicircunferência de diâmetro a+b. Traçamos a perpendicular à reta suporte a partir de P para encontrar o ponto T na semicircunferência. O comprimento PT é o lado ℓ do quadrado. Daí é só construir o quadrado.

5ª Questão

Seja ABCD o quadrilátero convexo da figura. E, F, G e H são os pontos médios de AB, BC, CD e DA. As retas EG e FH se encontram em P. O objetivo é mostrar que a reta IJ passa por P, onde I e J são os pontos médios das diagonais AC e BD.



Vamos arbitrar as coordenadas A(0,0), B(a,b), C(c,d) e D(e,0)

Com isso, temos os pontos E($\frac{a}{2}$,$\frac{b}{2}$), F($\frac{a+c}{2}$,$\frac{b+d}{2}$), G($\frac{c+e}{2}$,$\frac{d}{2}$), H($\frac{e}{2}$,0), I($\frac{c}{2}$,$\frac{d}{2}$) e J($\frac{a+e}{2}$,$\frac{b}{2}$)

O ponto médio de EG é ($\frac{a+c+e}{4}$, $\frac{b+d}{4}$)

O ponto médio de FH é ($\frac{a+c+e}{4}$, $\frac{b+d}{4}$)

O ponto médio de IJ é ($\frac{a+c+e}{4}$, $\frac{b+d}{4}$)

Logo, P($\frac{a+c+e}{4}$, $\frac{b+d}{4}$) é o ponto médio de EG, FH e IJ