CENTRO TÉCNICO DE AERONÁUTICA

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

QUESTÕES DE MATEMÁTICA PARA O EXAME DE ADMISSÃO AO ANO PRÉVIO EM 1950

Duração da prova: 3 horas

1ª Questão

Determine quando as raízes da equação

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

são:

a) reais e distintas;
b) eguais;
c) complexas.

Resolva a equação

$$x^2(x - 1) = x(x + 1) - 2x$$

2ª Questão

Prove que as medianas do triângulo cujos vértices são os pontos $(a,0)$, $(b,0)$ e $(0,c)$ são concorrentes e determine as coordenadas de seu ponto comum.

3ª Questão

Mostre como construir um círculo tangente a uma dada reta e passando por dois dados pontos, situados do mesmo lado da tangente. Prove que o produto dos dois segmentos determinados sobre uma corda de um círculo por um ponto externo é egual ao quadrado do segmento de tangente traçada do ponto ao círculo.

4ª Questão

Defina o coseno de um ângulo e prove que

$$\cos (A - B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B.$$

Prove igualmente que se x é diferente de 180º, teremos

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$$

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

EXAME DE ADMISSÃO AO ANO PRÉVIO EM 1950

SOLUÇÕES DAS QUESTÕES DE MATEMÁTICA – BOTELHO

1ª Questão

1ª parte:

Equação: $ax^2 + 2bx + c = 0$

Numa equação de 2º grau normal, $Ax^2 + Bx + C = 0$ e $\Delta = B^2 - 4AC$

Aqui, $\Delta = 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac)$

Se $\Delta > 0$, há duas raízes reais e distintas; se $\Delta = 0$, há duas raízes reais e iguais; se $\Delta < 0$, há duas raízes complexas

Resposta:

a) as raízes serão reais e distintas quando $b^2 > ac$

b) as raízes serão iguais quando $b^2 = ac$

c) as raízes serão complexas quando $b^2 < ac$

2ª parte:

$x^2(x - 1) = x(x + 1) - 2x \rightarrow x^2(x - 1) = x[x + 1 - 2] = x(x - 1)$

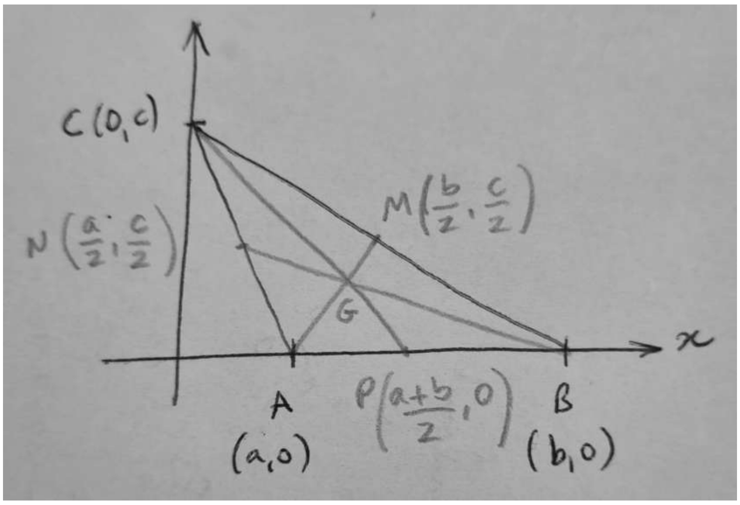
1º caso: $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

2º caso: $x - 1 \neq 0 \rightarrow x^2 = x \rightarrow x = 0$ ou $x = 1$

Resposta: $x = 0$ (raiz simples) ou $x = 1$ (raiz dupla)

2ª Questão

Seja o triângulo formado pelos pontos A (a,0), B (b,0) e C (0,c)



A mediana AM relativa ao vértice A e ao lado BC contém o ponto A (a,0) e o ponto M (b/2, c/2) médio de BC, logo, sua equação é $\frac{y_1-0}{\frac{c}{2}-0} = \frac{x_1-a}{\frac{b}{2}-a}$ → $y_1 = \frac{c(x_1-a)}{b-2a}$

A mediana BN relativa ao vértice B e ao lado AC contém o ponto B (b,0) e o ponto N (a/2, c/2) médio de BC, logo, sua equação é $\frac{y_2-0}{\frac{c}{2}-0} = \frac{x_2-b}{\frac{a}{2}-b}$ → $y_2 = \frac{c(x_2-b)}{a-2b}$

A mediana CP relativa ao vértice C e ao lado AB contém o ponto C (0,c) e o ponto P (a/2 + b/2, 0) médio de AB, logo, sua equação é $\frac{y_3-0}{c-0} = \frac{x_3-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}}{0-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}}$ → $y_3 = \frac{c(a+b-2x_3)}{a+b}$

A interseção entre AM e BN é o ponto G tal que $x_G = x_1 = x_2$ e $y_G = y_1 = y_2$

$\frac{c(x_G-a)}{b-2a} = \frac{c(x_G-b)}{a-2b}$ → $(x_G - a)(a - 2b) = (x_G - b)(b - 2a)$

$x_G(a - 2b + 2a - b) = a(a - 2b) - b(b - 2a)$ → $x_G(3a - 3b) = a^2 - 2ab - b^2 + 2ab$

$x_G = (a^2 - b^2)/(3a - 3b) = (a + b)(a - b)/[3(a - b)] = (a + b)/3$

$$y_G = \frac{c(x_G-a)}{b-2a} = \frac{c(\frac{a+b}{3}-a)}{b-2a} = \frac{c(\frac{a+b-3a}{3})}{b-2a} = \frac{c(\frac{b-2a}{3})}{b-2a} = \frac{c}{3}$$

A interseção entre AM e CP é o ponto H tal que $x_H = x_1 = x_3$ e $y_H = y_1 = y_3$

$\frac{c(x_H-a)}{b-2a} = \frac{c(a+b-2x_H)}{a+b}$ → $(x_H - a)(a+b) = (b - 2a)(a + b - 2x_H)$

$x_H(a + b) + 2x_H(b - 2a) = a(a + b) + (b - 2a)(a + b)$

$x_H(a + b + 2b - 4a) = (a + b - 2a)(a + b) = (b - a)(b + a)$

$x_H(3b - 3a) = (b - a)(b + a)$ → $x_H = (a + b)/3 = x_G$

Como H e G pertencem a AM, H = G

A interseção entre BN e CP é o ponto J tal que $x_J = x_2 = x_3$ e $y_J = y_2 = y_3$

$\frac{c(x_J - b)}{a - 2b} = \frac{c(a + b - 2x_J)}{a + b}$ → $(x_J - b)(a + b) = (a - 2b)(a + b - 2x_J)$

$x_J(a + b) + 2x_J(a - 2b) = b(a + b) + (a - 2b)(a + b)$

$x_J(a + b + 2a - 4b) = (b + a - 2b)(a + b)$

$x_J(3a - 3b) = (a - b)(a + b)$ → $x_J = (a + b)/3 = x_G$

Como J e G pertencem a BN, J = G

Resposta: O ponto G (a/3 + b/3, c/3) pertence às medianas AM, BN e CP

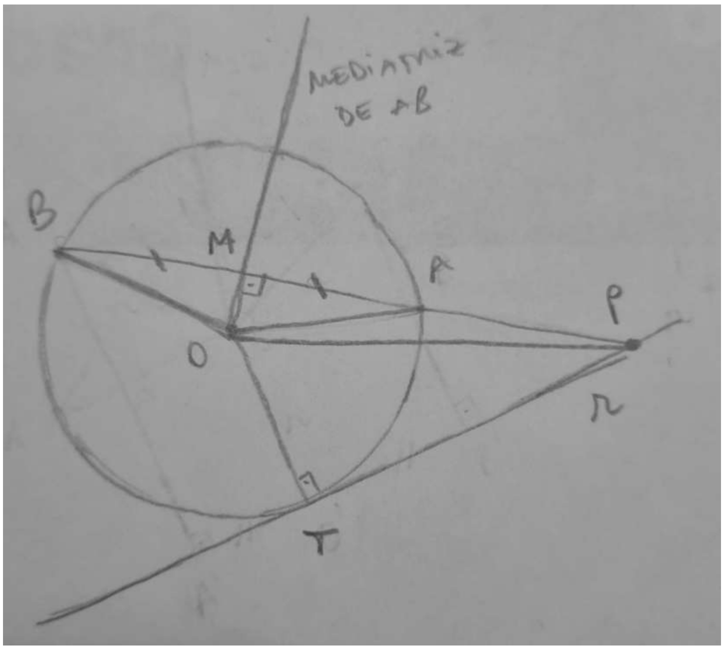
3ª Questão

1ª parte:

São dados os pontos A e B e a reta r.

Queremos traçar a circunferência que passa por A e B e é tangente a r.

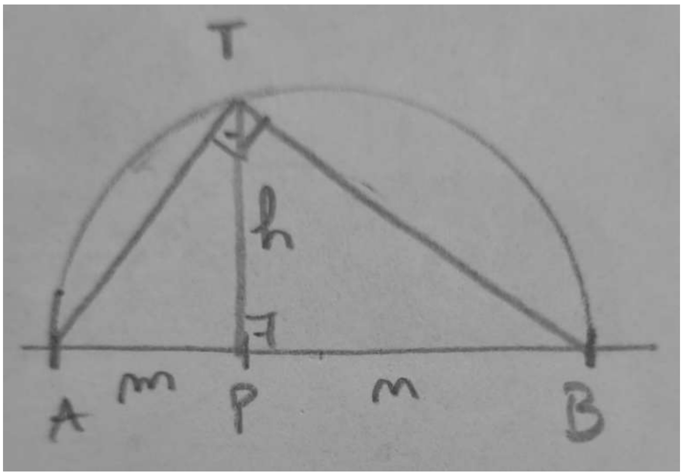
Olhando para a segunda parte da questão, vemos que a Banca quer que usemos potência de um ponto em relação à circunferência.



Seja P a interseção do prolongamento de AB com r e T o ponto de tangência, que ainda não temos.

A potência de P em relação à circunferência desejada é $PT^2 = PA.PB$, ou seja, PT é a média geométrica dos segmentos PA e PB.

Para determinar graficamente PT, usamos a propriedade $h^2 = m.n$ dos triângulos retângulos.



Em uma reta suporte, marcamos PA para a esquerda e PB para a direita, traçamos a semicircunferência com diâmetro AB e T será a interseção da semicircunferência com a perpendicular a AB por P.

Voltamos à figura inicial e determinamos T marcando PT sobre a reta r.

O centro O da circunferência pedida é a interseção da mediatriz do segmento AB, pois O equidista de A e B, com a perpendicular a r por T.

Basta agora traçar a circunferência a partir de O, passando por A, B e T.

2ª parte

Queremos provar que $PT^2 = PA.PB$

No triângulo retângulo OPT da figura inicial, $PT^2 = PO^2 – OT^2$

Se M é o ponto médio de AB, então $PA.PB = (PM – AM).(PM + BM)$

Como AM = BM, $PA.PB = (PM – AM).(PM + AM) = PM^2 – AM^2$

No triângulo retângulo OMP, $PM^2 = PO^2 – OM^2$

No triângulo retângulo AMO, $AM^2 = AO^2 – OM^2$

Além disso, OT = AO (raio da circunferência)

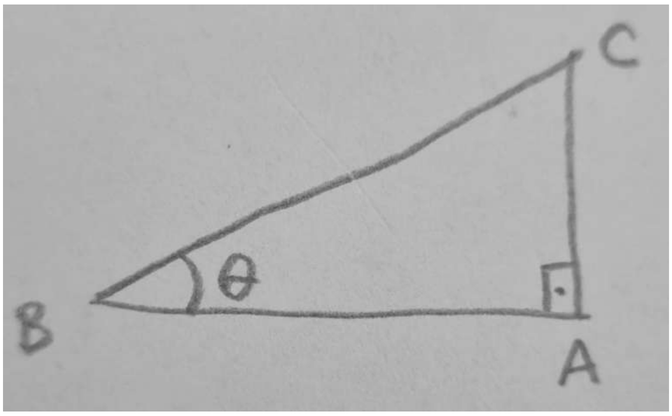
De tudo isso, $PA.PB = PO^2 – OM^2 – (OT^2 – OM^2) = PO^2 – OT^2$

Daí, $PT^2 = PA.PB = PO^2 – OT^2$

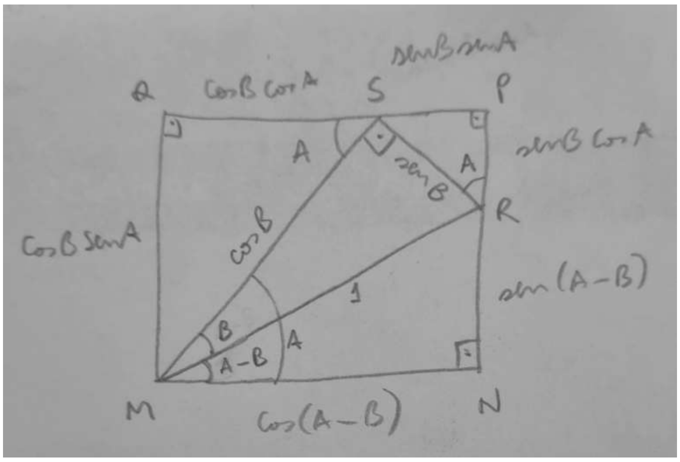
4ª Questão

1ª parte:

Uma definição de cosseno de um ângulo: em um triângulo retângulo, o **co**sseno do ângulo θ é a razão AB/BC entre o cateto adjacente (**co**lado) AB e a hipotenusa BC:



2ª parte:



Desenhe um quadrado MNPQ

Inscreva um triângulo retângulo MRS de hipotenusa MR = 1 e ângulo SMR = B

Daí, RS = sen B e MS = cos B

Seja A o ângulo PRS. Daí, PS = RS.sen A = senB.sen A

O ângulo MSQ, de lados perpendiculares a PRS, também é A

Daí, SQ = MS.cos A = cos B.cos A

O ângulo SMN é alterno interno do ângulo MSQ e também vale A

O ângulo RMN é SMN – SMR = A – B. Daí, MN = MR.cos (A – B) = cos (A – B)

Como MN = PQ = SQ + PS, então cos (A – B) = cosA.cosB + senA.senB

3ª parte:

Se x é diferente de 180º, então cos x ≠ –1 e o denominador de $\frac{1-cosx}{1+cosx}$ é não nulo

Substituindo cosx por 1 – 2.sen^2(x/2) no numerador e por 2.cos^2(x/2) – 1 no denominador, temos $\frac{1-cosx}{1+cosx} = \frac{1-[1-2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)]}{1+[2cos^2(\frac{x}{2})-1]} = \frac{2sen^2(\frac{x}{2})}{2cos^2(\frac{x}{2})} = tg^2(\frac{x}{2})$.