

MINISTÉRIO DA AERONÁUTICA
CENTRO TÉCNICO DE AERONÁUTICA
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

CONCURSO DE ADMISSÃO - 1968

EXAME DE MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES

1. A prova de Matemática consta de 25 questões de Múltipla Escolha.
2. A duração da prova é de 3 horas e 45 minutos.
3. Só há uma resposta certa em cada questão.
4. NÃO DEIXE DE RESPONDER NENHUMA QUESTÃO. QUANDO EM DÚVIDA, ASSINA
LE A RESPOSTA QUE LHE PARECER MAIS CORRETA.
5. Questões não respondidas ocasionam rejeição do cartão pelo compu
tador, podendo prejudicar o candidato.
6. Não escreva no caderno de questões.
7. Assinale com um traço curto e forte de lápis o espaço correspon
dente a cada questão, na folha de respostas.
8. Verificando algum engano nas respostas poderá corrigi-la usando
borracha.
9. Observe cuidadosamente o número das questões ao respondê-las.
10. O agente fiscal fornecerá papel para rascunho, o qual não será
considerado na correção da prova.
11. Não será permitido o uso de tabelas, régua de cálculo, apontamen
tos, formulários e outros papéis a não ser os fornecidos pelo
fiscal.
12. O caderno de questões contém 5 páginas numeradas de 2 a 6.

1. Se $a < 0$, a expressão $a^{\log_a x}$ é igual a:
- A) 1.
B) a.
C) 0.
D) 10
☒ E) Nenhuma das respostas anteriores.
2. Sejam $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 1$. Então $\log_b x \cdot \log_a b$ é igual a
- A) 1.
B) $\frac{1}{a}$.
C) b.
D) $\log_a x$
E) Nenhuma das respostas anteriores.
3. Dada a progressão geométrica: $:1: \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \dots$ o limite da soma dos termos da P.G. é
- A) $\frac{1}{2}$.
B) 2.
C) $1 + \frac{1}{2^n}$.
D) $\frac{3}{2}$.
E) 3.
4. Dado um número real $m > 0$, existem um polígono regular circunscrito e um polígono regular inscrito numa mesma circunferência, tais que a diferença entre seus perímetros é menor do que m. A afirmação acima é verdadeira quando:
- A) $m > 0$ e arbitrário.
B) $m > 1$.
C) m depende do raio da circunferência.
D) Necessariamente $m > 0$ e arbitrariamente pequeno.
☒ E) Nenhuma das respostas anteriores.
5. Dado um triângulo de lados $a = 3$ cm, $b = 4$ cm e $c = 6$ cm a projeção do lado a sobre o lado c é:
- A) $2\frac{5}{13}$ cm.
B) $2\frac{7}{12}$ cm.
C) $\frac{29}{12}$ cm.
D) 0.
☒ E) $2\frac{1}{2}$ cm.
6. Existe o triângulo ABC tal que $a = 10$ cm, $b = 4$ cm, $\beta = 30^\circ$, onde β é o ângulo oposto ao lado b? Em caso afirmativo, o lado c vale:
- A) 8 cm.
B) 7 cm.
C) 9 cm.
D) 11 cm.
☒ E) Não existe tal triângulo.
7. Uma esfera é colocada no interior de um vaso cônico com $\sqrt{55}$ cm de geratriz e $\sqrt{30}$ cm de altura. Sabendo-se que os pontos de tangência estão a 3 cm do vértice, o raio da esfera vale:
- A) $2\sqrt{30}$ cm.
B) $\frac{\sqrt{35}}{2}$ cm.
C) $\frac{\sqrt{30}}{2}$ cm.
D) 3 cm.
☒ E) Nenhuma das respostas anteriores.

8. Todo polígono convexo inscrito numa circunferência de raio R tem:

- A) O perímetro igual a πR^2 .
- B) O perímetro menor que πR .
- C) O perímetro menor que $8 R$.
- D) O perímetro igual a $6 R$.
- E) Nenhuma das respostas anteriores.

9. A função $x = \arcsen y$ é univocamente determinada para:

- A) $0 \leq x \leq \pi$
- B) $0 < x \leq 2\pi$
- C) $-\pi \leq x \leq \pi$
- D) $0 \leq x \leq 2k\pi, k = 1, 2, 3, \dots$
- E) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

10. Se $m \neq -1$, $y = \arcsen \frac{m-1}{m+1}$ é igual a:

- A) $\arccos \frac{m-1}{m+1}$.
- B) $\arctg \frac{m}{1+m^2}$.
- C) $\arccos \frac{2\sqrt{m}}{m+1}$.
- D) $\arcsen (1 - (\frac{m-1}{m+1})^2)$.
- E) Nenhuma das respostas acima.

11. A equação $3x^5 - x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0$ possui:

- A) Três raízes complexas e duas raízes reais.
- B) Pelo menos uma raiz real positiva.
- C) Todas raízes inteiras.
- D) Uma raiz complexa.
- E) Nenhuma das respostas anteriores.

12. Para que a equação $2x^4 + bx^3 - bx - 2 = 0$ tenha quatro soluções reais e distintas, devemos ter:

- A) b um número real qualquer.
- B) $b = 0$.
- C) $b > 0$.
- D) $b < -1$.
- E) $b > 4$.

13. Sejam a e b dois números reais, $a > 0$ e $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. Que relação devem satisfazer a e b para que a equação $x^2 - x(\log_b a) + 2 \log_a b = 0$ tenha duas raízes reais e iguais?

- A) $a = b^2$.
- B) $a = b$.
- C) $a^2 = b$.
- D) $a = 2b$.
- E) $b = 2a$.

14. Quais os valores de x que satisfazem a equação $\cos x - \cos \frac{x}{2} = 2$.

- A) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
- B) $x = K\pi$, K inteiro qualquer.
- C) $x = (K+1)\pi$, K inteiro qualquer.
- D) $x = (2K+2)\pi$, K inteiro qualquer.
- E) $x = (4K+2)\pi$, K inteiro qualquer.

15. Para que valores do número real a , podemos garantir que existe $\sin 2x$, sabendo-se que $\cos^4 x - \sin^4 x = a$.

- ☐ A) $a > 1$.
☐ B) $a \leq 0$.
☒ C) $0 \leq a \leq 1$.
☐ D) $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$.
☐ E) $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$.

16. Sejam a e b dois números reais quaisquer e p um número primo. A igualdade $(a \pm b)^p = a^p \pm b^p$ é verificada se:

- ☐ A) $a = b = 1$.
☐ B) a e b são primos entre si.
☒ C) $b = p \cdot a$.
☐ D) $x \cdot p = 0$ para todo número real x .
☐ E) Nenhuma das respostas acima.

17. Dizemos que os polinômios $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ são linearmente independentes se a relação $a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + a_3 p_3(x) = 0$ implica $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ (onde a_1 , a_2 e a_3 são números reais). Caso contrário, dizemos que $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ são linearmente dependentes. Os polinômios $p_1(x) = x^2 + 2x + 1$, $p_2(x) = x^2 + 1$ e $p_3(x) = x^2 + 2x + 2$ são:

- ☒ A) Linearmente independentes.
☐ B) Nem linearmente independentes nem linearmente dependentes.
☐ C) Linearmente independentes se $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ tiverem as raízes reais.
☐ D) Linearmente dependentes.
☐ E) Nenhuma das respostas acima.

18. Seja $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + \lambda y + z = 0 \\ y + \lambda z = 0 \end{cases}$

O sistema acima terá solução não trivial para um certo conjunto de valores de λ . Para que isto se verifique este conjunto é constituído:

- ☒ A) Apenas por números complexos não reais.
☐ B) Apenas por números reais.
☐ C) Apenas por números racionais.
☐ D) Apenas por números irracionais.
☐ E) Apenas por números inteiros.

19. Seja $y = a^{\log \operatorname{tg} x}$ com $0 < a < 1$, onde $\log u$ indica o logaritmo neperiano de u . Então, $\log y \geq 0$ se:

- ☐ A) $-\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ e $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$.
☒ B) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ e $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.
☐ C) $0 < x \leq \frac{\pi}{4}$ e $\pi < x \leq \frac{5\pi}{4}$.
☐ D) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ e $\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$.
☐ E) $0 < x \leq \frac{3\pi}{2}$.

20. Dadas duas retas concorrentes a e b e dado um ponto M , fora do plano determinado por a e b , consideremos os pontos E e F , simétricos de M em relação às retas a e b , respectivamente. A reta que une os pontos E e F é:
- Perpendicular ao plano determinado por a e b .
 - Paralela ao plano determinado por a e b .
 - Oblíqua ao plano determinado por a e b .
 - Pertencente ao plano determinado por a e b .
 - Nenhuma das respostas anteriores.
21. Consideremos um conjunto de retas paralelas no plano, distanciadas entre si de uma distância d . Uma agulha de comprimento a , onde $a < d$, é jogada sobre o conjunto de retas paralelas. Pelo ponto médio da agulha traçamos uma perpendicular à reta mais próxima, que forma com a agulha, um ângulo θ . Seja x a distância do ponto médio da agulha à reta mais próxima. Em qual dos seguintes casos, podemos assegurar que a agulha intercepta alguma reta do conjunto?
- $x \geq 2a \sin \theta$.
 - $x \leq \frac{a}{2} \cos \theta$.
 - $x \leq a \sin \theta \cos \theta$.
 - $x \geq a^2 \sin \theta$.
 - Nenhuma das respostas anteriores.
22. O campo de definição e o campo de variação da função $y = \log_{10} x$ são respectivamente:
- O conjunto dos números racionais e o conjunto dos números reais.
 - O conjunto dos números naturais e o conjunto dos números racionais.
 - O conjunto dos números reais e o conjunto dos números reais.
 - O conjunto dos números reais estritamente positivos e o conjunto dos números reais.
 - O conjunto dos números reais diferentes de zero e o conjunto dos números reais.
23. Suponhamos que os polinômios $P(x)$, $Q(x)$, $p(x)$ e $q(x)$ satisfazem as seguintes condições:
- $$P(x) \cdot p(x) + q(x) \cdot Q(x) = 1 \text{ para todo } x \text{ complexo,}$$
- $$P(p(1)) = 0, Q(0) = 0.$$
- Assinale a afirmação correta:
- $P(x)$ é divisível por $S(x) = x$.
 - $P(x)$ e $Q(x)$ não são primos entre si.
 - $Q(p(1)) = 0$.
 - $p(x)$ não é divisível por $R(x) = x - 1$.
 - $p(0) = 0$.
24. O valor absoluto de um número y é menor ou igual que todas as soluções positivas da equação
- $$(1 - x) + x(1 - x) = 1 - x^2$$
- Assinale a afirmação correta:
- $y = -\frac{1}{2}$.
 - $y = -1$.
 - $-3 \leq y \leq 3$.
 - $y = \frac{1}{2}$.
 - Nenhuma das afirmações acima.

25. Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ números reais.

A expressão $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$ é igual a:

A) $\sum_{i=1}^n a_i^2 + 4 \sum_{j=1}^n a_j$.

B) $\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_i a_j \right)$.

C) $\sum_{i=1}^n a_i^2 + \binom{n}{2} \sum_{j=1}^n a_j$.

D) $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_i a_j \right)$.

(E) Nenhuma das respostas anteriores.

① A BASE DE UM LOGARITMO DEVE SER UM NÚMERO POSITIVO DIFERENTE DE 1

EM $a^{\log_a x}$, NÃO PODEREMOS TER $a < 0$

NÃO SE DEFINE!!!

OBS.: SE a FOSSE MAIOR QUE 0 E $\neq 1$

$$y = a^{\log_a x} \therefore \log_a y = \log_a a^{\log_a x} = \log_a a \cdot \log_a x = 1 \cdot \log_a x = \log_a x$$

$$y = x$$

DE QUALQUER MODO, NENHUMA DAS RESPOSTAS

ANTERIORES É CORRETA

E //

② OBS.: A QUESTÃO, DE INÍCIO, CONFIRMA AS CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA DA BASE DE UM LOGARITMO COBRADAS NA QUESTÃO ANTERIOR (BASE > 0 E $\neq 1$)

$$\log_b x \cdot \log_a b = \frac{\log x}{\log b} \cdot \frac{\log b}{\log a} = \frac{\log x}{\log a} = \log_a x //$$

D //

③ PG = $a_0, a_0q, a_0q^2, \dots$

$$S = a_0 + a_0q + a_0q^2 + \dots$$

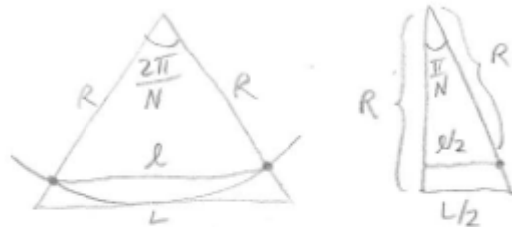
$$qS = a_0q + a_0q^2 + \dots$$

$$S(1-q) = a_0$$

$$S = \frac{a_0}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 //$$

B //

④



$$\sin \frac{\pi}{N} = \frac{l/2}{R} \therefore l = 2R \sin \frac{\pi}{N}$$

$$\cos \frac{\pi}{N} = \frac{L/2}{R} \therefore L = 2R \cos \frac{\pi}{N} \therefore L \geq l$$

$$2p = 2R \cdot N \sin \frac{\pi}{N}$$

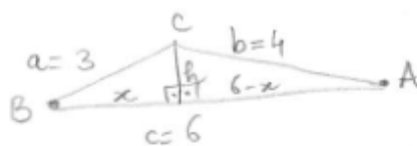
$$2P = 2R \cdot N \cos \frac{\pi}{N}$$

$$2P - 2p = 2RN \sin \frac{\pi}{N} \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{N}} - 1 \right)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} = 0 \therefore m > 0 \text{ E TÃO PEQUENO QUANTO SE QUEIRA} //$$

D //

⑤



$$x^2 + h^2 = 9$$

$$(6-x)^2 + h^2 = 16$$

$$(6-x)^2 - x^2 = 7$$

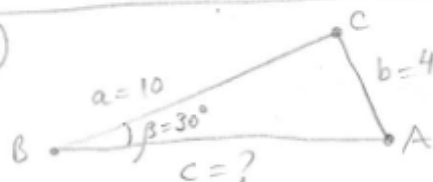
$$(6-x+x)(6-x-x) = 7$$

$$36 - 12x = 7$$

$$x = \frac{29}{12} //$$

C //

⑥



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$16 = 100 + c^2 - 20c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c^2 - 10\sqrt{3}c + 84 = 0$$

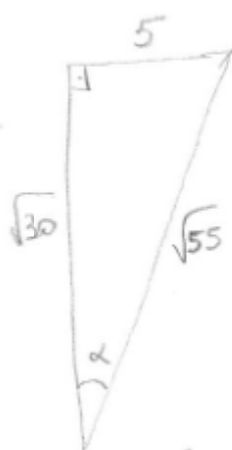
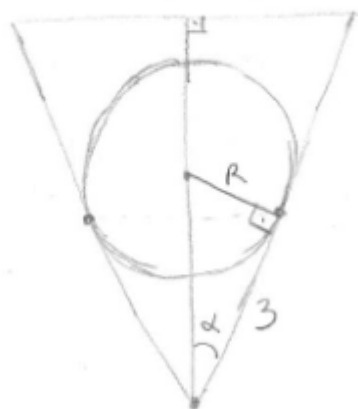
$$c = \frac{10\sqrt{3} \pm \sqrt{300 - 4 \cdot 84}}{2} \therefore \Delta < 0$$

C NÃO É REAL $\therefore$ NÃO EXISTE TAL TRIÂNGULO //

E //

①

7



$$\tan \alpha = \frac{R}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{55}}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{30}{55}} = \sqrt{\frac{25}{55}} = \frac{5}{\sqrt{55}}$$

$$\tan \alpha = \frac{R}{3} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{5}{\sqrt{30}}$$

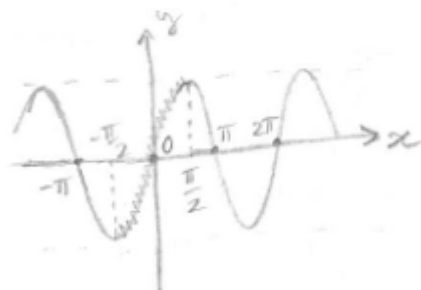
$$R = \frac{15}{\sqrt{30}} = \frac{15\sqrt{30}}{30} = \frac{\sqrt{30}}{2} \quad C //$$

8 OBS.: A QUESTÃO NAO FALA QUE O POLIGONO É REGULAR

NO CASO LIMITE, O PERIMETRO DO POLIGONO TENDE A COINCIDIR COM A CIRCUNFERENCIA

$$2P < 2\pi R < 8R \quad C //$$

9 $x = \arcsin y \therefore y = \sin x$



PARA QUE Y NAO SE REPITA:

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$-1 \leq y \leq 1$$

E //

10 $y = \arcsin \frac{m-1}{m+1}$

$$\sin y = \frac{m-1}{m+1}$$

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - \frac{m^2 - 2m + 1}{m^2 + 2m + 1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{m^2 + 2m + 1 - m^2 + 2m - 1}{(m+1)^2}} = \frac{2\sqrt{m}}{m+1}$$

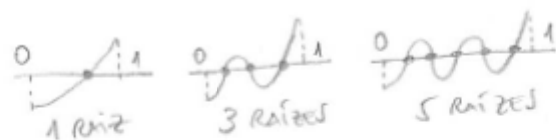
$$y = \arccos \frac{2\sqrt{m}}{m+1} \quad C //$$

11 A EQUAÇÃO PODE TER, NO MÁXIMO, DOIS PARES DE RAÍZES COMPLEXAS CONJUGADAS ($a \pm bi$ E $c \pm di$). PELO MENOS UMA RAÍZ É REAL.

$$\text{MAS } P(0) = -1$$

$$P(1) = 3 - 1 + 2 + 1 - 1 = 4$$

PELO TEOREMA DE BOLZANO, HÁ UM NÚMERO ÍMPAR DE RAÍZES REAIS ENTRE 0 E 1



LOGO, HÁ PELO MENOS UMA RAÍZ REAL POSITIVA //

B //

12 EQUAÇÃO RECÍPROCA DE 2ª ESPÉCIE (COEFICIENTES EQUIDISTANTES SIMÉTRICOS) E 4º GRAU

1 É RAÍZ PORQUE $2 + b - b - 2 = 0$
 -1 É RAÍZ PORQUE $2 - b + b - 2 = 0$

BIOT-RUFFINI

	2	b	0	-b	-2	
1	2	2+b	2+b	2	0	
-1	2	b	2	0		

$$2x^2 + bx + 2 = 0 \therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{4}$$

PARA SOLUÇÕES REAIS DISTINTAS $b^2 - 16 > 0$

$$b < -4 \text{ ou } b > 4 //$$

E //

2

(13) PARA QUE UMA EQUAÇÃO DO 2.º GRAU TENHA RAÍZES REAIS E IGAIS, $\Delta = 0$

$$\Delta = (\log_a b)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \log_b a = 0$$

$$\log_b a = \frac{\log b}{\log a} = \frac{1}{\log_a b}$$

$$\text{SEJA } y = \log_a b \quad \therefore y^2 - \frac{8}{y} = 0$$

$$y^2 = \frac{8}{y} \quad \therefore y^3 = 8 \quad \therefore y = 2$$

$$\log_a b = 2 \quad \therefore a = b^2 \quad \text{A//}$$

(14) $\cos x - \cos \frac{x}{2} = 2$

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$$

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} - 3 = 0$$

$$\text{SEJA } y = \cos \frac{x}{2} \quad \therefore 2y^2 - y - 3 = 0$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} \quad \begin{matrix} \nearrow \frac{6}{4} \text{ NÃO} \\ \rightarrow -1 \text{ OK} \end{matrix}$$

$$\cos \frac{x}{2} = -1 \quad \therefore \frac{x}{2} = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = (4k+2)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

E//

(15) $\cos^4 x - \sin^4 x = a$

$$\underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_1 \underbrace{(\cos^2 x - \sin^2 x)}_{\cos 2x} = a$$

$\sin 2x$ EXISTE SE E SÓ SE EXISTE $\cos 2x$

Logo, $-1 \leq a \leq 1 \rightarrow$ SEM RESPOSTA //

OBS.: PROVAVELMENTE O CORRETO ERA

$$\cos^4 x + \sin^4 x = a$$

$$\cos^2 x \cdot \cos^2 x + \sin^2 x \cdot \sin^2 x = a$$

$$\cos^2 x (1 - \sin^2 x) + \sin^2 x (1 - \cos^2 x) = a$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x = a$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x = a$$

$$\underbrace{1}_{1} - \frac{\sin^2 2x}{2} = a$$

$$\sin^2 2x = 2 - 2a$$

$$\text{SE } 0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \text{ ENTÃO } 0 \leq 2 - 2a \leq 1$$

$$0 \leq 2 - 2a \quad \therefore 2a \leq 2 \quad \therefore a \leq 1$$

$$2 - 2a \leq 1 \quad \therefore 2a \geq 1 \quad \therefore a \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leq a \leq 1 //$$

D//

(16) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

SÓ É IGUAL A $a^2 + b^2$ SE $ab = 0$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

SÓ É IGUAL A $a^3 + b^3$ SE $\pm 3a^2b + 3ab^2 = 0$

ISTO É, $ab = 0$ OU $\pm a + b = 0$

NENHUMA DAS RESPOSTAS //

E//

$$(17) \quad a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + a_3 p_3(x) = 0$$

$$a_1(x^2+2x+1) + a_2(x^2+1) + a_3(x^2+2x+2) = 0$$

$$(a_1+a_2+a_3)x^2 + (2a_1+2a_3)x + (a_1+a_2+2a_3) = 0$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0 \quad (I)$$

$$2a_1 + 2a_3 = 0 \quad (II)$$

$$a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \quad (III)$$

$$(III) - (I): a_3 = 0$$

$$(II): a_1 = -a_3 = 0$$

$$(I): a_2 = -a_1 - a_3 = 0$$

LINEARMENTE INDEPENDENTES //

ORS.: ISSO SIGNIFICA QUE NENHUM DOS POLINÔMIOS É COMBINAÇÃO LINEAR DOS DOIS OUTROS

A //

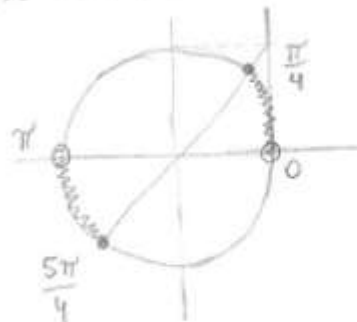
$$(19) \quad y = a^{\log_{Tg} x}$$

$$\log y = \log_{Tg} x \cdot \log a$$

↑
OVERO
≥ 0

↑
< 0 PORQUE 0 < a < 1

ENTÃO, $\log_{Tg} x \leq 0 \rightarrow 0 < Tg x \leq 1$
COMO $Tg x$ É ARGUMENTO DE $\log$, SÓ
PODE SER POSITIVA



$$0 < x \leq \frac{\pi}{4}$$

ou

$$\pi < x \leq \frac{5\pi}{4}$$

C //

$$(18) \quad \begin{cases} \lambda x + 1y + 0z = 0 \\ 1x + \lambda y + 1z = 0 \\ 0x + 1y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}} = \frac{0}{\lambda^3 - \lambda - \lambda} = \frac{0}{\lambda^3 - 2\lambda}$$

HAVERÁ INDETERMINAÇÃO (INFINITAS SOLUÇÕES)

QUANDO $x = \frac{0}{0}$, ISTO É, QUANDO $\lambda^3 - 2\lambda = 0$

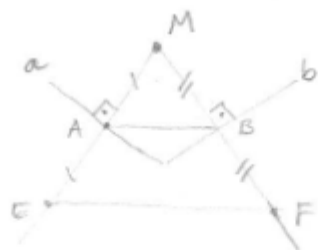
$$\lambda^3 - 2\lambda = \lambda(\lambda^2 - 2) = 0$$

$$\lambda = 0, \lambda = \sqrt{2} \text{ ou } \lambda = -\sqrt{2}$$

O CONJUNTO DE VALORES DE λ É CONSTITUÍDO APENAS POR NÚMEROS REAIS //

B //

(20)



$$\alpha = (a, b)$$

$$AB \in \alpha$$

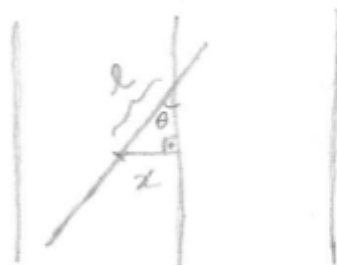
$$EF \parallel AB$$

$$EF \parallel \alpha$$

A RETA É PARALELA AO PLANO //

B //

(21) PROBLEMA DAS AGULHAS DE BUFFON



$$\sin \theta = \frac{x}{l} \therefore x = l \sin \theta$$

$$\text{PARA HAVER INTERSEÇÃO, } l \leq \frac{a}{2}$$

$$x \leq \frac{a}{2} \sin \theta //$$

E //

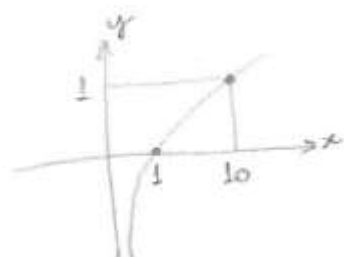
(4)

(continuação)

- 22 CAMPO DE DEFINIÇÃO = DOMÍNIO
CAMPO DE VARIAÇÃO = IMAGEM

$$y = \log_{10} x$$

$$x \in \mathbb{R}_+^* \therefore y \in \mathbb{R} //$$



D //

23 $P(x) \cdot p(x) + Q(x) \cdot q(x) = 1$

SE $x=0 \rightarrow P(0) \cdot p(0) + \underbrace{Q(0) \cdot q(0)}_0 = 1$

$P(0) \cdot p(0) = 1 \therefore p(0) \neq 0$ ("E" ERRADA)

$P(0) \neq 0$, LOGO NÃO É DIVISÍVEL POR $S(x) = x$

("X" ERRADA)

SE $x = p(1) \rightarrow \underbrace{P(p(1)) \cdot p(p(1))}_0 + Q(p(1)) \cdot q(p(1)) = 1$

$Q(p(1)) \cdot q(p(1)) = 1 \therefore Q(p(1)) \neq 0$ ("C" ERRADA)

VAMOS SUPOR QUE $P(x)$ E $Q(x)$ NÃO SEJAMPRIMOS $\rightarrow$ HAVERIA UM $D(x)$ COMUM TAL QUE

$$P(x) = P'(x) \cdot D(x) \text{ E } Q(x) = Q'(x) \cdot D(x)$$

$$\text{DAÍ } P'(x) \cdot D(x) \cdot p(x) + Q'(x) \cdot D(x) \cdot q(x) = 1$$

$$D(x) [P'(x) \cdot p(x) + Q'(x) \cdot q(x)] = 1$$

$$D(x) = 1 \rightarrow P(x) \text{ E } Q(x) \text{ SÃO PRIMOS}$$

("B" ERRADA)

$$\text{VIMOS QUE } P(0) \neq 0 \text{ E } P(p(1)) = 0$$

$$\text{SE } p(1) \text{ FOSSE } 0, P(p(1)) \neq 0 \text{ (ABSURDO)}$$

$$\text{LOGO, } p(1) \neq 0 \rightarrow 1 \text{ NÃO É RAIZ DE } p(x)$$

$$p(x) \text{ NÃO É DIVISÍVEL POR } R(x) = x-1 //$$

D //

24 $|y| \leq$ soluções positivas

$$(1-x) + x(1-x) = 1-x^2$$

$$1-x + x - x^2 = 1-x^2$$

$$1-x^2 = 1-x^2$$

QUALQUER $x > 0$ É SOLUÇÃO POSITIVAPARA QUE $|y|$ SEJA MENOR QUE OU IGUALA TODO x POSITIVO, $y=0 //$ MAS, SE $y=0$, ENTÃO $-3 \leq y \leq 3 \dots$

C //

25 $(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^2 =$

$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_m)(a_1 + a_2 + \dots + a_m) =$$

$$= \text{SOMA DE TODOS OS TERMOS } a_i a_j \left\{ \begin{array}{l} i=1 \dots m \\ j=1 \dots m \end{array} \right.$$

$$= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_i a_j \right) //$$

$$i=1 \rightarrow a_1 a_1 \quad a_1 a_2 \dots a_1 a_m$$

$$i=2 \rightarrow a_2 a_1 \quad a_2 a_2 \dots a_2 a_m$$

$$i=m \rightarrow a_m a_1 \quad a_m a_2 \dots a_m a_m$$

D //