

FUVEST 1996 – Segunda fase – Matemática

M.01

Numa classe de um colégio existem estudantes de ambos os sexos. Numa prova, as médias aritméticas das notas dos meninos e das meninas foram respectivamente iguais a 6,2 e 7,0. A média aritmética das notas de toda a classe foi igual a 6,5.

- a) A maior parte dos estudantes dessa classe é composta de meninos ou de meninas? Justifique sua resposta.
- b) Que porcentagem do total de alunos da classe é do sexo masculino?

M.02

No início de sua manhã de trabalho, um feirante tinha 300 melões que ele começou a vender ao preço unitário de R\$ 2,00. A partir das dez horas reduziu o preço em 20% e a partir das onze horas passou a vender cada melão por R\$ 1,30. No final da manhã havia vendido todos os melões e recebido o total de R\$ 461,00.

- a) Qual o preço unitário do melão entre dez e onze horas?
- b) Sabendo que  $\frac{5}{6}$  dos melões foram vendidos após as dez horas, calcule quantos foram vendidos antes das dez, entre dez e onze e após as onze horas.

M.03

Seja  $f(x)$  o logaritmo de  $2x$  na base  $x^2 + \frac{1}{2}$ .

- a) Resolva a equação  $f(x) = \frac{1}{2}$ .
- b) Resolva a inequação  $f(x) > 1$ .

M.04

Considere a função  $f(x) = \text{sen}x \cdot \text{cos}x + \frac{1}{2}(\text{sen}x - \text{sen}5x)$ .

- a) Resolva a equação  $f(x) = 0$  no intervalo  $(0, \pi]$ .
- b) O gráfico de  $f$  pode interceptar a reta de equação  $y = \frac{8}{5}$ ? Explique sua resposta.

M.05

Considere a função  $f(x) = x\sqrt{1 - 2x^2}$

a) Determine constantes reais  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  de modo que

$$(f(x))^2 = \alpha \left[ (x^2 + \beta)^2 + \gamma \right]$$

b) Determine os comprimentos dos lados do retângulo de área máxima, com lados paralelos aos eixos coordenados, inscrito na elipse de equação  $2x^2 + y^2 = 1$ .

M.06

Considere, no plano cartesiano, os pontos  $P = (0, -5)$  e  $Q = (0, 5)$ . Seja  $X = (x, y)$  um ponto qualquer com  $x > 0$ .

a) Quais são os coeficientes angulares das retas  $PX$  e  $QX$ ?

b) Calcule, em função de  $x$  e  $y$ , a tangente do ângulo  $\widehat{PXQ}$ .

c) Descreva o lugar geométrico dos pontos  $X = (x, y)$  tais que  $x > 0$  e  $\widehat{PXQ} = \frac{\pi}{4}$  radianos.

M.07

Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y + z = -2m \\ x - y - 2z = 2m \\ 2x + y - 2z = 3m + 5 \end{cases}$$

a) Para cada valor de  $m$ , determine a solução  $(x_m, y_m, z_m)$  do sistema.

b) Determine todos os valores de  $m$ , reais ou complexos, para os quais o produto  $x_m y_m z_m$  é igual a 32.

M.08

As bases de um tronco de cone circular reto são círculos de raios 6 cm e 3 cm. Sabendo-se que a área lateral do tronco é igual à soma das áreas das bases, calcule:

- a) a altura do tronco de cone.
- b) o volume do tronco de cone.

M.09

São efetuados lançamentos sucessivos e independentes de uma moeda perfeita (as probabilidades de cara e de coroa são iguais) até que apareça cara pela segunda vez.

- a) Qual é a probabilidade de que a segunda cara apareça no oitavo lançamento?
- b) Sabendo-se que a segunda cara apareceu no oitavo lançamento qual é a probabilidade condicional de que a primeira cara tenha aparecido no terceiro?

M.10

Na figura abaixo são dadas duas semi-retas  $r$  e  $s$  de mesma origem  $A$  e um ponto  $P$ .

- a) Utilize essa figura para construir, usando régua e compasso, os pontos  $B$  em  $r$  e  $C$  em  $s$  de tal forma que o ponto  $P$  pertença ao segmento  $BC$  e que  $AB$  seja igual a  $AC$ .
- b) Descreva e justifique o processo utilizado na construção.

