

FUVEST 1995 – Segunda fase – Matemática (12/01/1995)

Q.01

Determine todos os valores de m para os quais a equação:

$$\frac{mx}{4} - \frac{(x-2)}{m} = 1$$

a) admite uma única solução.

b) não admite solução.

c) admite infinitas soluções.

Q.02

A, **B** e **C** são pontos de uma circunferência de raio 3 cm, $AB = BC$ e o ângulo \widehat{ABC} mede 30° .

a) Calcule, em cm, o comprimento do segmento AC.

b) Calcule, em cm^2 , a área do triângulo ABC.

Q.03

Considere a função $f(x) = \text{sen}x + \text{sen}5x$.

a) Determine as constantes k , m e n tais que $f(x) = k \cdot \text{sen}(mx) \cdot \cos(nx)$.

b) Determine os valores de x , $0 \leq x \leq \pi$, tais que $f(x) = 0$.

Q.04

- a) Esboce, num mesmo sistema de coordenadas, os gráficos de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 2x$.
- b) Baseado nos gráficos do item (a), resolva a inequação $2^x \leq 2x$.
- c) Qual é o maior: 2 elevado a $\sqrt{2}$ ou 2 multiplicado por $\sqrt{2}$?
Justifique brevemente sua resposta.

Q.05

Sejam $A = (0, 0)$, $B = (0, 5)$ e $C = (4, 3)$ pontos do plano cartesiano.

- a) Determine o coeficiente angular da reta **BC**.
- b) Determine a equação da mediatriz do segmento **BC**. O ponto **A** pertence a esta mediatriz?
- c) Considere a circunferência que passa por **A**, **B** e **C**. Determine a equação da reta tangente a esta circunferência no ponto **A**.

Q.06

- a) Quais são as raízes inteiras do polinômio $p(x) = x^3 - x^2 - 4$?
- b) Decomponha o polinômio $p(x)$ em um produto de dois polinômios, um de grau 1 e outro de grau 2.
- c) Resolva a inequação $p(x) < 4(x - 2)$.

Q.07

Lembrando que:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!},$$

a) calcule $\binom{6}{4}$

b) simplifique a fração $\frac{\binom{12}{4}}{\binom{12}{5}}$

c) determine os inteiros **n** e **p** de modo que

$$\frac{\binom{n}{p}}{1} = \frac{\binom{n}{p+1}}{2} = \frac{\binom{n}{p+2}}{3}$$

Q.08

a) Uma urna contém três bolas pretas e cinco bolas brancas. Quantas bolas azuis devem ser colocadas nessa urna de modo que, retirando-se uma bola ao acaso, a probabilidade de ela ser azul seja igual a 2/3?

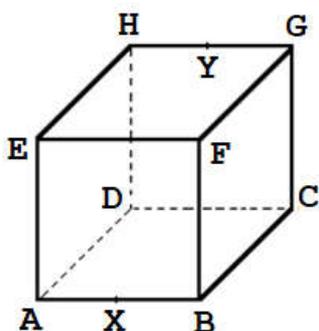
b) Considere agora uma outra urna que contém uma bola preta, quatro bolas brancas e x bolas azuis. Uma bola é retirada ao acaso dessa urna, a sua cor é observada e a bola é devolvida à urna. Em seguida, retira-se novamente, ao acaso, uma bola dessa urna. Para que valores de x a probabilidade de que as duas bolas sejam da mesma cor vale 1/2?

Q.09

a) Determine os números complexos z tais que $z + z' = 4$ e $z \cdot z' = 13$, onde **z'** é o conjugado de **z**.

b) Resolva a equação $x^4 - 5x^3 + 13x^2 - 19x + 10 = 0$, sabendo que o número complexo $z = 1 + 2i$ é uma das suas raízes.

Q.10



No cubo de aresta ' a ' mostrado na figura adiante, X e Y são pontos médios das arestas AB e GH respectivamente. Considere a pirâmide de vértice F e cuja base é o quadrilátero $XCYE$. Calcule, em função de a ,

a) o comprimento do segmento XY .

b) a área da base da pirâmide.

c) o volume da pirâmide.