FUVEST 1989 – Segunda fase – Geografia e Matemática (08/01/1989)

GEOGRAFIA

Chuvas já mataram mil em Bangladesh

DACA — Mais de mil pessoas já morreram e 28 milhões estão desabrigadas por causa das inundações em Bangladesh. As chuvas começaram em junho, e depois de um período de calma em julho, voltaram a cair com força. Ontem, a imprensa local noticiou que os três principais rios do país — Ganges, Bramaputra e Megnha — começaram a baixar, mas num ritmo muito lento. Cerca de 75% do território de Bangladesh — que tem uma área total de 144 mil km^2 e é um dos países mais densamente povoados do mundo, com 700 habitantes por km^2 — está inundado.

Ontem, o presidente Hussain Muhammad Ershad (que chegou ao poder depois de um golpe de Estado, em 1982, e governa sem Parlamento e sem Constituição) sobrevoou de helicóptero várias regiões próximas da capital e pediu à Organização das Nações Unidas (ONU) e outras organizações internacionais que o ajudem a "alimentar a população por pelo menos dois meses". Em resposta ao apelo, a Comunidade Econômica Européia (CEE) liberou ontem mesmo o equivalente a 175 milhões de cruzados, que serão enviados a Bangladesh em forma de comida, remédios e combustíveis, através da Cruz Vermelha Internacional.

A maior parte das colheitas deste ano (arroz, juta e chá) está perdida. Também ficaram destruídas quase todas as estradas do país, e cidades inteiras ficaram sem uma única construção em pé.

Pela dificuldade de conseguir água potável, a população está ameaçada por uma disenteria epidêmica.

O Estado de S. Paulo — 07/09/88

01 Caracterize o clima da região onde se localiza o país em questão.

Resolução

Bangladesh está situada na Ásia Meridional ou Ásia de Monções e, como o próprio nome indica, localiza-se em uma região que está sujeita ao clima tropical monçônico. A principal característica desse clima é a presença de duas estações bem definidas: durante o inverno as massas de ar deslocam-se do continente para o Oceano Índico, provocando a queda das temperaturas e períodos de seca e durante o verão as massas de ar deslocam-se do Oceano Índico para o continente, transportando muita umidade e provocando o aparecimento de altos índices pluviométricos que atingem em média 2.500 a 6.000 mm/ano e o período de maior ocorrência é no verão, que ocorre durante os meses de junho, julho e agosto.

02 Quais elementos da notícia sugerem a idéia de que este país pertence ao Terceiro Mundo?

Resolução

Dentre os elementos da notícia que sugerem a idéia de que este país pertence ao Terceiro Mundo podemos destacar o fato de ser governado por uma ditadura (sem Parlamento e sem Constituição) o que nos faz supor uma organização política e social frágil. O pedido do presidente Hussain à ONU e a outras organizações internacionais que o ajudem a "alimentar a população por pelo menos dois meses", o envio de 175 milhões de cruzados a Bangladesh em forma de comida, remédios e combustíveis, através da Cruz Vermelha Internacional, o que demonstra a falta de reservas financeiras no país e a dependência em relação aos órgãos internacionais. Também o fato de uma parcela da população ficar desabrigada em virtude de uma tragédia natural, o que nos leva à constatação da fragilidade das moradias, além de haver predomínio de culturas tropicais de *plantation* e o fato da população estar ameaçada por uma disenteria epidêmica, pela falta de água potável, o que comprova a falta de uma boa rede sanitária.

03 Qual é, aproximadamente, a população total do país? Como você chegou a esse número?

Resolução

A população absoluta de Bangladesh é de aproximadamente 100.000.000 de habitantes; chegamos a tal número multiplicando a área territorial do país (144.000 km^2) pela sua densidade demográfica (700 habitantes por km^2).

04 O que é a Comunidade Econômica Européia?

Resolução

A Comunidade Econômica Européia ou Mercado Comum Europeu é um organismo supranacional, instituído em 1957 pelo Tratado de Roma, que engloba Holanda, Bélgica, Luxemburgo, Itália, França, República Federal Alemã, Dinamarca, Eire (Irlanda do Sul), Reino Unido, Portugal, Grécia e Espanha.

Seus principais objetivos são: a integração política e econômica, o livre deslocamento de mão de obra, a livre circulação de capital e mercadorias e a eliminação de barreiras alfandegárias entre seus membros.

05 Em 1980, a população de Brasília ultrapassou a cifra de um milhão de habitantes. Apesar disso ela não é classificada como metrópole nacional ou regional. Como você explica esse fato, se Belém, com 934.000 habitantes em 1980, era considerada uma metrópole regional?

Resolução

Para classificarmos uma cidade como metrópole nacional ou regional leva-se em conta, principalmente, se a cidade exerce uma influência urbana polarizante em sua região ou no país.

O número de habitantes não é o principal elemento de análise em uma hierarquia urbana, e sim a capacidade de prestação de serviços da mesma. É, assim, o setor terciário bem diversificado o principal elemento da posição hierárquica de uma cidade.

Belém, apesar de ser menos populosa que Brasília, polariza uma ampla região que é servida por ela e que a serve, ao passo que Brasília tem como principal característica um setor terciário excessivamente inchado no setor da administração pública, devido a sua característica de cidade artificial (local escolhido por razões geopolíticas) com função de sede dos três poderes e da administração federal, mas ainda pouco desenvolvida nos demais setores de prestação de serviços.

06 Quais as principais decisões contidas nas Disposições Transitórias da Constituição promulgada em 5 de outubro de 1988, no que se refere à divisão territorial do Brasil?

Resolução

As principais decisões contidas nas Disposições Transitórias da Constituição de 1988 foram: o território de Fernando de Noronha deixou de existir e passou a ser incorporado ao estado de Pernambuco, os territórios de Roraima e Amapá passaram a estados e o estado de Goiás foi dividido, passando a parte norte a formar o novo estado de Tocantins (pertencente à região Norte), enquanto o sul de Goiás permaneceu com o mesmo nome e pertence à região Centro-Oeste.

Assim, o Brasil, que possuía 22 estados, 3 territórios e 1 distrito federal antes da Constituição de 88, passa a possuir atualmente 26 estados e 1 distrito federal.

07

a) Quais os fatores que fundamentaram a escolha de Cubatão para instalação da COSIPA?

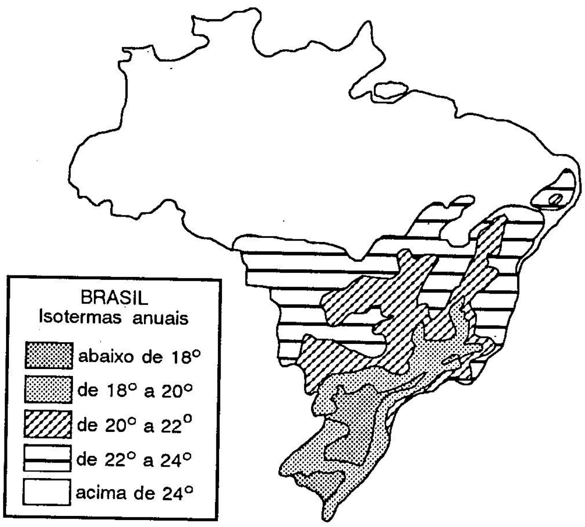
b) Quais as conseqüências dessa instalação?

Resolução

a) Os fatores que fundamentaram a escolha de Cubatão para a instalação da COSIPA foram os seguintes: a proximidade do Porto de Santos e da Via Anchieta, para receber o carvão mineral importado e escoar a produção de aço; a existência de numerosa mão-de-obra na região; a proximidade do maior centro consumidor de aço no país, representado pela região da Grande São Paulo; a existência de uma boa produção de energia elétrica na área escolhida e uma boa quantidade de água na região.

b) As conseqüências dessa instalação foram: o aumento dos índices de poluição no ar atmosférico, que acabaram provocando o aparecimento das chuvas ácidas e, como conseqüência, a destruição de parte da Mata Atlântica nas encostas da Serra do Mar e a poluição dos rios.

08 Explique as causas da distribuição geográfica do fenômeno abaixo cartografado.



Resolução

As isotermas anuais cartografadas no mapa do Brasil mostram, em primeiro lugar, o efeito da latitude sobre a distribuição das temperaturas no país. Tal fato pode ser constatado quando verificamos que as maiores temperaturas predominam nas áreas de menores latitudes (mais próximas do Equador, como Amazônia e Nordeste) e à medida que nos dirigimos para o sul, com latitudes maiores, as isotermas indicam predomínio de temperaturas menores.

Outro fator é a altitude; em média a cada 180 ou 200 m de altitude a temperatura cai 1°C e este aspecto pode ser observado no mapa, principalmente nas isotermas registradas no Sudeste e Sul do país, devido à presença das áreas serranas.

09 Explique o comportamento dos dados da região Nordeste levando em consideração as transformações sócio-econômicas ocorridas a nível nacional e regional.

Brasil — Distribuição da População por Regiões (%)

REGIÕES	1950	1960	1970	1980
Norte	3,6	3,7	3,9	4,9
Nordeste	34,6	31,6	30,2	29,6
Sudeste	43,4	43,7	42,8	43,5
Sul	15,1	16,8	17,7	16,0
Centro-Oeste	3,3	4,2	5,4	6,3

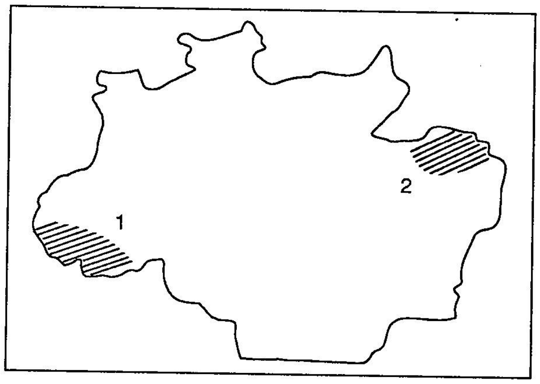
Fonte IBGE — *Anuário Estatístico* — 1985

Resolução

Constatamos que houve diminuição da participação percentual do Nordeste na população total do país, no período de 1950 a 1980, que pode ser creditada às transformações econômicas pelas quais o Brasil tem passado nas últimas décadas, com a industrialização do país concentrando-se principalmente no Centro-Sul, relegando o Nordeste a uma posição econômica secundária. Vale ressaltar que as regiões Norte e Centro-Oeste apresentaram crescimento populacional, embora pequeno, quando comparado ao restante do país. Os principais fatores foram a construção de Brasília, as rodovias de integração e os projetos de colonização desenvolvidos pelo INCRA; estes fatores receberam mão-de-obra do Nordeste.

Podemos concluir também que essa diminuição percentual não foi conseqüência da diminuição do crescimento vegetativo na região, o que não ocorreu, e sim do aumento do êxodo de nordestinos em direção às outras regiões do país.

10 Caracterize as principais atividades econômicas que serviram de base para a ocupação das regiões 1 e 2. Comente o impacto que produziram nas condições naturais.



Resolução

A região hachurada identificada com o número 1 corresponde ao Estado do Acre que foi ocupado durante o final do século XIX e início do século XX pelo ciclo da borracha. Tal atividade não provoca grande impacto nas condições naturais, pois é uma atividade extrativa que exige a preservação da floresta para a sua realização. A região hachurada identificada com o número 2 corresponde à região Bragantina, no Estado do Pará e, por estar próxima do litoral brasileiro, foi área pioneira da ocupação da Amazônia.

A área foi bastante modificada em suas condições naturais devido ao crescimento urbano da cidade de Belém, ao corte da madeira de lei e à ocupação pelos imigrantes japoneses, que acabaram desenvolvendo atividades econômicas como o cultivo da pimenta-do-reino e do arroz, que para serem efetuadas provocaram a destruição da vegetação natural dessa área.

11 Em 1984, Brasil e Chile apresentaram a mesma renda per capita (1710 dólares). Isso pode significar que o desenvolvimento econômico dos dois países seja também semelhante? Por quê?

Resolução

A renda per capita é obtida quando dividimos o Produto Nacional Bruto pelo número de habitantes existente no país. A renda per capita não é um bom indicador para retratar a situação econômica de uma país, pois mascara a realidade e não mostra a verdadeira distribuição da riqueza entre a população.

Portanto, também não pode ser utilizada para comparar o grau de desenvolvimento econômico entre dois ou mais países (no caso Brasil e Chile), a não ser que, à mesma, se juntem outros dados sociais, políticos e econômicos que nos possibilitem diversificar a nossa análise, permitindo assim, que se possa chegar a conclusões mais verdadeiras. A renda per capita é simplesmente uma operação aritmética, sem outros embasamentos.

12 Hoje, após 15 anos será que a situação mostrada na tabela sofreu alterações significativas? Por quê?

Repartição Mundial das Despesas em Pesquisa e Desenvolvimento — 1973		
Regiões	Milhões de dólares	%
Mundo Capitalista desenvolvido	64.139	66,5
Terceiro Mundo	2.770	2,9
Mundo Socialista	29.509	30,6

Resolução

As despesas em pesquisa e desenvolvimento estão diretamente ligadas à disponibilidade de capital e ao grau de competitividade econômica do país que a realiza (**Países Capitalistas Desenvolvidos**) ou ao interesse estratégico determinado pelo plano geral que direciona a política e a economia dos países de economia planificada (**Mundo Socialista**). Assim é perfeitamente compreensível que os países do **Terceiro Mundo**, periféricos, descapitalizados e dependentes economicamente dos países centrais, apliquem muito pouco em pesquisa e desenvolvimento e que tal situação perdure até hoje, sem perspectiva de modificação.

MATEMÁTICA

01 Ao escalar uma trilha de montanha, um alpinista percorre 256 m na primeira hora, 128 m na segunda hora, 64 m na terceira hora e assim sucessivamente. Determinar o tempo (em horas) necessário para completar um percurso de:

a) 480 m
b) 500 m
c) 600 m

Resolução

A seqüência das distâncias percorridas pelo alpinista, por hora, é: (256, 128, 64, 32, 16, 8, ...), que é uma P.G. de razão $\frac{1}{2}$.

Consideremos a seqüência S onde cada termo S_n representa a distância total percorrida pelo alpinista até a n-ésima hora:

$S = (256, 384, 448, 480, 496, 504, 508, 510, ...)$

a) $S_4 = 480$, assim, para completar 480 m são necessárias 4 horas.

b) $S_5 < 500 < S_6$, assim, para completar 500 m são necessárias entre 5 e 6 horas, não sendo possível a determinação exata por falta de dados.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{256}{1 - \frac{1}{2}} = 512$, assim, o percurso de 600 m nunca será completado.

Resposta: a) 4 h; b) entre 5 e 6 horas; c) o percurso de 600 m nunca será completado.

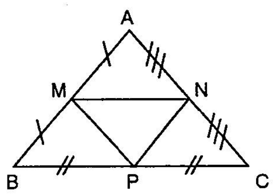
02

a) Determine a razão entre as áreas de dois triângulos, sabendo que os vértices de um deles são os pontos médios dos lados do outro.

b) Determine a razão entre o volume de um tetraedro e o volume do octaedro cujos vértices são os pontos médios das arestas do tetraedro.

Resolução

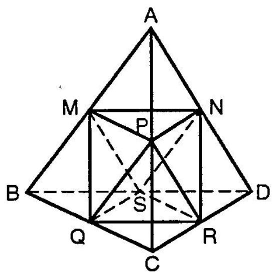
a) Sendo ABC e MNP os triângulos citados, temos:



$\Delta ABC \sim \Delta MNP$ com razão $k = \frac{1}{2}$, assim:

$$\frac{A_{MNP}}{A_{ABC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

b) Sendo $ABCD$ e $MNPQRS$ o tetraedro e o octaedro citado, respectivamente, temos:



$AMPN$ e $ABCD$ são semelhantes com razão $k = \frac{1}{2}$, assim:

$$\frac{V_{AMPN}}{V_{ABCD}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$V_{MNPQRS} = V_{ABCD} - 4 \cdot V_{AMPN} \Rightarrow$$

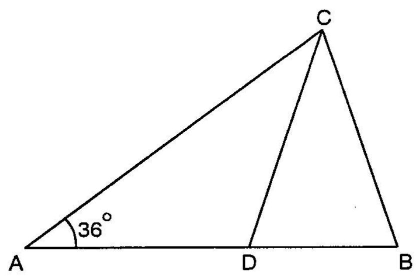
$$\Rightarrow V_{MNPQRS} = V_{ABCD} - 4 \cdot \frac{V_{ABCD}}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{MNPQRS} = \frac{V_{ABCD}}{2} \Rightarrow \frac{V_{ABCD}}{V_{MNPQRS}} = 2$$

Resposta: a) $\frac{1}{4}$; b) 2

03

Na figura abaixo $AB = AC$, $CB = CD$ e $\hat{A} = 36°$.

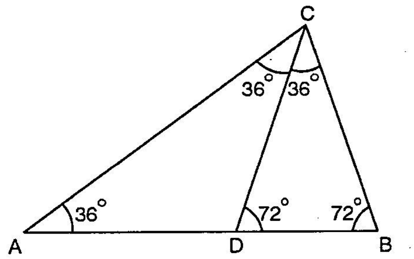


a) Calcule os ângulos $D\hat{C}B$ e $A\hat{D}C$.

b) Prove que $AD = BC$.

Resolução

a)



$$\left.\begin{matrix} AB = AC \\ \hat{A} = 36° \end{matrix}\right\} \Rightarrow A\hat{B}C = A\hat{C}B = 72°$$

$$\left.\begin{matrix} CB = CD \\ A\hat{B}C = 72° \end{matrix}\right\} \Rightarrow B\hat{D}C = 72° \text{ e } D\hat{C}B = 36°$$

$$A\hat{D}C = 180° - B\hat{D}C \Rightarrow A\hat{D}C = 108°$$

b) $A\hat{C}D = A\hat{C}B - D\hat{C}B \Rightarrow A\hat{C}D = 72° - 36° \Rightarrow A\hat{C}D = 36°$

$$A\hat{C}D = C\hat{A}D = 36° \Rightarrow AD = DC \text{ (I)}$$

$$\left.\begin{matrix} AD = DC \text{ (I)} \\ DC = BC \text{ (dado)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow AD = BC \quad \therefore \text{c.q.d.}$$

Resposta: a) $D\hat{C}B = 36°$ e $A\hat{D}C = 108°$; b) Demonstração.

04

Para todo $x \geq 0$ seja $f(x)$ o quadrado da distância do ponto $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ao ponto $(x, \sqrt{x})$.

a) Esboce o gráfico da função f.

b) Determine o ponto da curva $y = \sqrt{x}$ mais próximo do ponto $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

Resolução

a) O quadrado da distância entre os pontos em questão é dado por:

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2;\ x \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + \frac{9}{4};\ x \geq 0$$

Raízes:

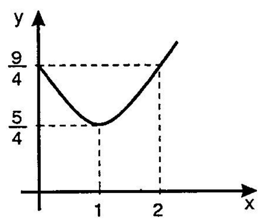
$$x^2 - 2x + \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow \Delta = -5 < 0$$

Vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-5)}{4 \cdot 1} = \frac{5}{4}$$

Gráfico:



b) Sendo $P(x, \sqrt{x})$ um ponto qualquer da curva $y = \sqrt{x}$ e d a distância de P ao ponto $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, temos:

$$d^2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2 = f(x)$$

d é mínima quando $f(x)$ é mínima e a partir da parte (a), d é mínima para $x = 1$.

Assim, o ponto da curva mais próximo de $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ é $(1, \sqrt{1})$ ou seja, $(1, 1)$.

Resposta: a) Gráfico; b) (1,1)

05 Uma reta de coeficiente angular $m < 0$ passa pelo ponto $P = (1, 2)$.

a) Escreva a equação da reta para $m = -1$.

b) Calcule m de modo que a reta forme com os eixos um triângulo de área 4.

Resolução

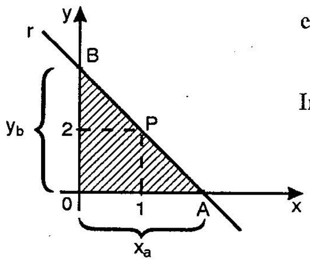
a) A equação da reta que passa pelo ponto $P(1,2)$ e tem coeficiente angular m, é dada por:

$$y - 2 = m(x - 1)$$

para $m = -1$, temos:

$$y - 2 = -1(x - 1) \Rightarrow x + y - 3 = 0$$

b) Sendo r a reta em questão, temos:



equação de r:

$$y - 2 = m(x - 1)$$

Interceptos de r:

$$y_A = 0 \Rightarrow x_A = \frac{m-2}{m}$$

$$x_B = 0 \Rightarrow y_B = -m + 2$$

Como $m < 0$, temos $x_A > 0$ e $y_B > 0$

Assim, a área do triângulo em questão é dada por:

$$A = \frac{x_A y_B}{2} \Rightarrow 4 = \frac{\left(\frac{m-2}{m}\right) \cdot (-m + 2)}{2} \Rightarrow m = -2$$

Resposta: a) $x + y - 3 = 0$; b) $m = -2$

06 Resolva o sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x - y + mz = n \\ x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

nos seguintes casos:

a) $m = 0$ e $n = 0$

b) $m = -2$ e $n = 0$

c) $m = -2$ e $n = 5$

Resolução

Trocando a ordem da segunda e terceira equações e escalonando:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 & \times(-1) \quad \times(-1) \\ x + 3y + 2z = 1 \\ x - y + mz = n \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 0 + y + z = -1 \\ 0 - 3y + (m-1)z = n - 2 \end{cases} \times(3) \sim \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 0 + y + z = -1 \\ 0 + 0 + (m+2)z = n - 5 \end{cases}$$

a) Para $m = 0$ e $n = 0$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ y + z = -1 \\ 2z = -5 \end{cases}$$

$$z = -\frac{5}{2}$$

$$y - \frac{5}{2} = -1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

$$x + 2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = 2 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$S = \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)\right\}$$

b) Para $m = -2$ e $n = 0$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ y + z = -1 \\ 0 = -5 \end{cases}$$

que é impossível

$$S = \varnothing$$

c) Para $m = -2$ e $n = 5$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ y + z = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Sendo $z = \alpha$, temos:

$$y + \alpha = -1 \Rightarrow y = -1 - \alpha$$

$$x + 2 \cdot (-1 - \alpha) + \alpha = 2 \Rightarrow x = 4 + \alpha$$

$$S = \{(x, y, z) / (x, y, z) = (4 + \alpha, -1 - \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{C}\}$$

07

Drummond vira nota de 50 mil

BRASÍLIA — A inflação brasileira vai colocar em circulação a efígie de mais uma celebridade de nossa cultura: o poeta Carlos Drummond de Andrade estará na cédula de Cz$ 50 mil, aprovada na reunião de ontem do Conselho Monetário Nacional (CMN). Quando sair, em março, os Cz$ 50 mil estarão valendo apenas Cz$ 21 mil, se a inflação se mantiver em 25% ao mês.

"Precisamos derrubar logo essa inflação antes que esgote nossa galeria de heróis", brincou o ministro Maílson da Nóbrega, provocando risos nos demais conselheiros. O CMN autorizou o governo a enviar ao Congresso um projeto de lei extingüindo o centavo, que havia sido banido em 1983, mas foi resgatado pelo Plano Cruzado.

A inflação obrigou a Casa da Moeda a propor a modificação do tamanho da cédula: a de Cz$ 50 mil será menor, com 140 por 65 milímetros. O tamanho normal é de 154 por 74 milímetros.

Com isso, a Casa da Moeda pretende economizar US$ 13 milhões por ano com o aumento de sua capacidade de produção de 1,5 bilhão para 2,1 bilhões de cédulas por ano.

a) Usando os dados contidos na notícia, prove matematicamente que ela foi publicada no mês de novembro de 1988.

b) Prove que a quantidade de papel usada para imprimir, 1,5 bilhões de cédulas do modelo antigo não é suficiente para imprimir 2,1 bilhões de cédulas do modelo novo.

Resolução

a) "Valor" da nota de Cz$ 50 mil:

- um mês após a notícia: $\frac{50.000}{1,25} = 40.000$
- dois meses após a notícia: $\frac{50.000}{1,25^2} = 32.000$
- três meses após a notícia: $\frac{50.000}{1,25^3} = 25.600$
- quatro meses após a notícia: $\frac{50.000}{1,25^4} = 20.480$, que se aproxima de Cz$ 21.000,00.

Assim, a notícia foi publicada 4 meses antes de março de 1989, isto é, em novembro de 1988.

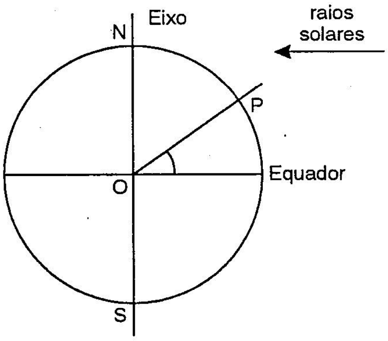
b) Sendo A_1 e A_2 as áreas de papel necessárias para imprimir as cédulas do modelo antigo e nova, respectivamente, temos:

$A_1 = 1,5 \cdot (154 \cdot 74) \Rightarrow A_1 = 17.094$ bilhões de mm^2

$A_2 = 2,1 \cdot (140 \cdot 65) \Rightarrow A_2 = 19.110$ bilhões de mm^2.

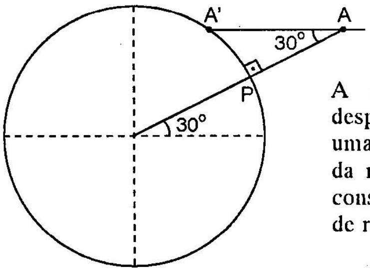
Como $A_1 < A_2$, a quantidade de papel não é suficiente para imprimir as cédulas do modelo novo.

08 A latitude de um ponto *P* da superfície da Terra é o ângulo que a reta *OP* forma com o plano do Equador (*O* é o centro da Terra). No dia 21 de março os raios solares são paralelos ao plano do Equador.



Calcule o comprimento da sombra projetada, no dia 21 de março ao meio dia, por um prédio de 30 metros de altura, localizado a 30° de latitude.

Resolução



A curvatura da Terra é desprezível se tomarmos uma porção muito pequena da mesma; assim, podemos considerar $A'P$ um segmento de reta.

Assim, no $\Delta APP'$:

$\overline{AP}$ = prédio

$\overline{A'P}$ = sombra do prédio

Como $\overleftrightarrow{AA'}$ // equador, temos que $\hat{A} = 30°$, logo:

$$\text{tg } 30° = \frac{A'P}{AP} \Rightarrow A'P = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow A'P = 10\sqrt{3}$$

Assim, o comprimento da sombra projetada é $10\sqrt{3}$ m.

Resposta: $10\sqrt{3}$ m

09

a) Defina elipse de focos F_1 e F_2.

Considere no plano *xy* a elipse de focos $F_1 = (-1,1)$ e $F_2 = (1,-1)$ e semi-eixo maior igual a 2.

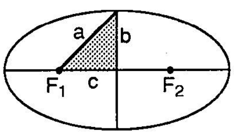
b) Calcule o outro semi-eixo da elipse.

c) Determine a intersecção da elipse com a reta de equação $x = 1$.

Resolução

a) Dados dois pontos F_1 e F_2, num plano, elipse de focos F_1 e F_2 é o lugar geométrico dos pontos desse plano em que a soma das distâncias a F_1 e F_2 é constante e maior que F_1F_2.

b)



$$d_{F_1, F_2} = \sqrt{(-1-1)^2 + (1+1)^2} \Rightarrow$$

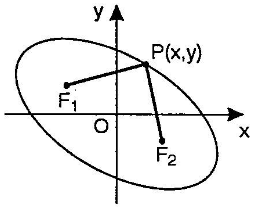
$$\Rightarrow d_{F_1, F_2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow c = \sqrt{2}$$

Como: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2^2 = b^2 + (\sqrt{2})^2 \Rightarrow b = \sqrt{2}$$

Assim, o semi-eixo menor é $\sqrt{2}$.

c)



Sabemos que a soma das distâncias de um ponto da elipse aos focos é igual ao comprimento do eixo maior, assim, pela definição de elipse:

$$d_{PF_1} + d_{PF_2} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 4$$

A reta em questão intercepta a elipse nos pontos onde $x = 1$, assim:

$$\sqrt{4 + (y-1)^2} + \sqrt{0 + (y+1)^2} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{4 + (y-1)^2} = 4 - |y+1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{4 + (y-1)^2})^2 = (4 - |y+1|)^2 \Rightarrow 8|y+1| - 4y - 12 = 0$$

Se $y \geq 1$, então $8 \cdot (y+1) - 4y - 12 = 0 \Rightarrow y = 1$

Se $y < -1$, então $8 \cdot -(y+1) - 4y - 12 = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{3}$

Assim, os pontos de intersecção são $(1,1)$ e $\left(1, -\frac{5}{3}\right)$

Resposta: a) Definição; b) $\sqrt{2}$; c) $(1,1)$ e $\left(1, -\frac{5}{3}\right)$

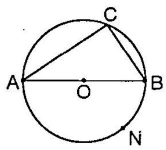
10

a) Em uma circunferência são dados um diâmetro *AB* e um ponto *C* diferente de *A* e de *B*. Prove que o ângulo $A\hat{C}B$ é reto.

b) Dados num plano uma circunferência de centro *O* e um ponto externo *P*, descreva um processo que permita construir, com régua e compasso, as retas que passam por *P* e são tangentes à circunferência.

Resolução

a)

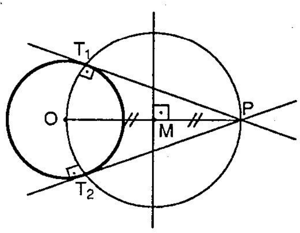


O arco *ANB* mede 180°.

Sabemos que a medida de um ângulo inscrito é a metade da medida do arco que o mesmo enxerga, assim:

$$A\hat{C}B = \frac{1}{2}\text{med}(ANB) \Rightarrow A\hat{C}B = 90°$$

b)



I) Traça-se a mediatriz de $\overline{OP}$, encontrando o ponto *M* médio de $\overline{OP}$.

II) Constrói-se uma circunferência de centro *M* e diâmetro $\overline{OP}$ encontrando os pontos T_1 e T_2 na intersecção com a circunferência dada.

III) As reta $\overleftrightarrow{PT_1}$ e $\overleftrightarrow{PT_2}$ são as tangentes procuradas.

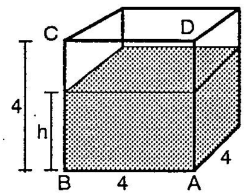
11 Um recipiente cúbico de aresta 4 está apoiado em um plano horizontal e contém água até uma altura *h*. Inclina-se o cubo, girando de um ângulo α em torno de uma aresta da base, até que o líquido comece a derramar. Determinar a tangente do ângulo α nos seguintes casos:

a) $h = 3$

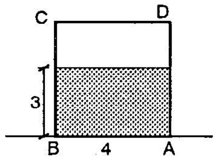
b) $h = 2$

c) $h = 1$

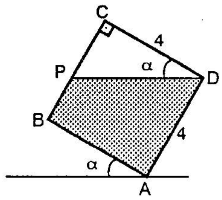
Resolução



a) $h = 3 \Rightarrow V_{água} > \dfrac{V_{cubo}}{2}$



Antes: Paralelepípedo de dimensões 3, 4 e 4.



Depois: Prisma de base $ABPD$ e altura 4

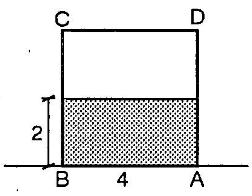
ΔCDP: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{CP}{CD} \Rightarrow CP = 4\,\text{tg}\,\alpha$

$PB = 4 - CP \Rightarrow PB = 4 - 4\,\text{tg}\,\alpha$

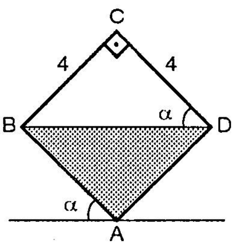
$V_{antes} = V_{depois} \Rightarrow 3 \cdot 4 \cdot 4 = \dfrac{(4 + (4 - 4\,\text{tg}\,\alpha)) \cdot 4}{2} \cdot 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{2}$

b) $h = 2 \Rightarrow V_{água} = \dfrac{V_{cubo}}{2}$



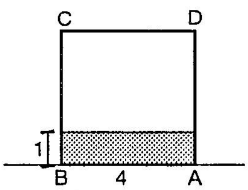
Antes



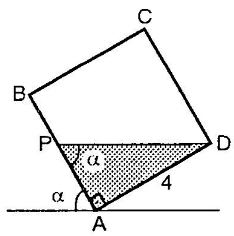
Depois

ΔBCD: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{BC}{CD} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = 1$

c) $h = 1 \Rightarrow V_{água} < \dfrac{V_{cubo}}{2}$



Antes: Paralelepípedo de dimensões 1, 4 e 4.



Depois: Prisma de base PDA e altura 4

ΔPDA: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{AD}{AP} \Rightarrow AP = \dfrac{4}{\text{tg}\,\alpha}$

$V_{antes} = V_{depois} \Rightarrow 1 \cdot 4 \cdot 4 = \dfrac{\dfrac{4}{\text{tg}\,\alpha} \cdot 4}{2} \cdot 4 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = 2$

Resposta: a) $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{2}$; b) $\text{tg}\,\alpha = 1$; c) $\text{tg}\,\alpha = 2$

12 A equação $x^3 - 2x^2 - x + 14 = 0$ tem uma raiz inteira r e duas raízes imaginárias s e t.

a) Determine as raízes r, s e t.

b) Escreva a equação cujas raízes são $\dfrac{1}{r}$, $\dfrac{1}{s}$ e $\dfrac{1}{t}$.

c) Determine a equação cujas raízes são st, rt e rs.

Resolução

a) Pelo Teorema das Raízes Racionais, podemos afirmar que se a equação admitir alguma raiz inteira, esta raiz deve ser divisor de 14, isto é, deve pertencer ao conjunto $\{-1, 1, -2, 2, -7, 7, -14, 14\}$

Por tentativa, conclui-se que -2 é raiz.

Pelo dispositivo de Briot-Ruffini:

	1	−2	−2	14
−2	1	−4	7	0

$\therefore\ x^3 - 2x^2 - x + 14 \equiv (x + 2)(x^2 - 4x + 7)$

Fazendo $x^2 - 4x + 7 = 0$, temos:

$\Delta = 16 - 28 = -12 \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{3}\,\mathbf{i}}{2}$

Assim, as raízes da equação $x^3 - 2x^2 - x + 14 = 0$ são: -2, $2 + \sqrt{3}\,\mathbf{i}$ e $2 - \sqrt{3}\,\mathbf{i}$

b) Na equação $x^3 - 2x^2 - x + 14 = 0$. Sendo r, s e t raízes, pelas relações de Girard, temos:

$r + s + t = 2$; $rs + rt + st = -1$ e $rst = -14$.

Sendo $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ uma equação com raízes $\dfrac{1}{r}$, $\dfrac{1}{s}$ e $\dfrac{1}{t}$, temos:

$\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{t} = -a \Rightarrow -a = \dfrac{st + rt + rs}{rst} \Rightarrow -a = \dfrac{-1}{-14} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = -\dfrac{1}{14}$

$\dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{s} \cdot \dfrac{1}{t} = b \Rightarrow b = \dfrac{t + s + r}{rst} \Rightarrow b = -\dfrac{2}{14} \Rightarrow$

$\Rightarrow b = -\dfrac{1}{7}$

$\dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{1}{s} \cdot \dfrac{1}{t} = -c \Rightarrow -c = \dfrac{1}{rst} \Rightarrow -c = -\dfrac{1}{14} \Rightarrow c = \dfrac{1}{14}$

Assim, a equação é: $x^3 - \dfrac{1}{14}x^2 - \dfrac{1}{7}x + \dfrac{1}{14} = 0$

Multiplicando por 14, temos:

$14x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$

c) Sendo $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ uma equação com raízes rs, rt e st, temos:

$rs + rt + st = -a \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1$

$(rs)(rt) + (rs)(st) + (rt)(st) = b \Rightarrow b = rst(r + s + t) \Rightarrow$

$\Rightarrow b = -14 \cdot 2 \Rightarrow b = -28$

$(rs) \cdot (rt) \cdot (st) = -c \Rightarrow -c = (rst)^2 \Rightarrow c = (-14)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow c = -196$

Assim, a equação é: $x^3 + x^2 - 28x - 196 = 0$

Resposta: a) -2, $2 + \sqrt{3}\,\mathbf{i}$ e $2 - \sqrt{3}\,\mathbf{i}$;
b) Uma equação é $14x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$;
c) uma equação é $x^3 + x^2 - 28x - 196 = 0$

Cortesia: Resoluções MED Vestibulares

Geografia: Antônio Cavenaghi e Carlos Alberto Regalo
Matemática: Arnaldo William Pinto e Francisco C. de Souza