FUVEST 1997 – Segunda fase – Área de Exatas
Geografia e Matemática (04/01/1987)

GEOGRAFIA

QUESTÃO 05

OPORTUNIDADE
Pequena empresa de mineração pretende dedicar-se à exploração de minérios siderúrgicos em São Paulo, com vistas à exportação anual de 10.000 t para o Japão. Ótima oportunidade para pequenos investidores.

Analise a viabilidade da empresa que colocou o anúncio acima, tendo em vista:
a) a organização da produção e comercialização em escala mundial.
b) as condições geológicas para a extração dos minérios.

RESOLUÇÃO: A viabilidade econômica desta empresa, considerando-se a organização da produção e comercialização em escala mundial, é muito reduzida. A produção de minérios siderúrgicos só é viável em economia de escala, ou seja, em grandes volumes pois exige investimento inicial muito grande, e o preço dos produtos é muito baixo. Com relação à comercialização, tal quantidade (10.000 t) inviabilizaria o transporte a uma distância tão longa.
Por outro lado, as condições geológicas do estado de São Paulo não possibilitariam grandes resultados, pois não se identifica nenhuma província geológica de ocorrência mineral (de grande porte), que apresente estrutura cristalina de origem Proterozóica.

QUESTÃO 06 *Os mapas apresentam duas formas de organização regional do Brasil. Identifique as áreas hachuriadas e justifique seus limites.*

A

B

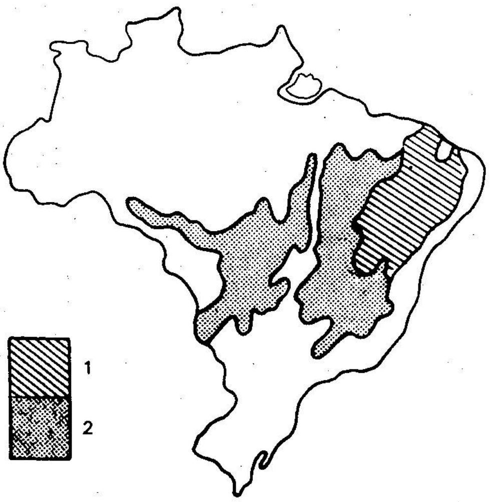
RESOLUÇÃO: O mapa A indica a região Norte, cujos limites são definidos a partir da divisão político-administrativa das unidades federadas.
O mapa B indica a chamada região geo-econômica da Amazônia, caracterizada por uma paisagem equatorial, vazios demográficos e forte presença de atividades extrativas.

QUESTÃO 07 *Cite três condições, criadas pela cafeicultura, que favoreceram a concentração industrial em São Paulo.*

RESOLUÇÃO: Dentre as condições criadas pela cafeicultura que favoreceram a concentração industrial em São Paulo, podemos destacar:
1) a acumulação de capitais;
2) a expansão do mercado consumidor;
3) a participação da mão-de-obra imigrante qualificada;
4) a criação de uma infra-estrutura de transportes.

QUESTÃO 08

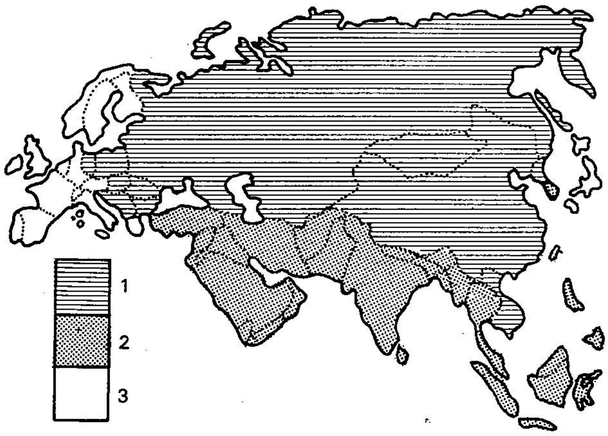
Identifique as duas formações vegetais destacadas no mapa e relacione-as com as condições climáticas dominantes.



RESOLUÇÃO: A paisagem vegetal predominante na área 1 é a caatinga, determinada pelas condições termopluviométricas do clima semi-árido.
A paisagem vegetal predominante na área 2 é o cerrado, condicionado pelo clima tropical, que se caracteriza pela presença de duas estações bem definidas.

QUESTÃO 09

Identifique do ponto de vista político e econômico os três conjuntos de países representados no mapa. Cite um país típico de cada conjunto.



RESOLUÇÃO: Política e economicamente, os três conjuntos de países representados são:
legenda 1 — Países socialistas de economia planificada, com destaque para URSS, China e RDA, entre outros.
legenda 2 — Países economicamente subdesenvolvidos, com grande diversidade de formas de organização política, tais como a Índia (Parlamentarismo), a Arábia Saudita (Monarquia), o Irã (República Islâmica) e o Iêmen do Sul (República Socialista).
legenda 3 — Predominância de países capitalistas desenvolvidos, tais como Japão, Reino Unido, França, Espanha etc.

QUESTÃO 10 *Caracterize o istmo da América Central do ponto de vista político.*

RESOLUÇÃO: A América Central Istmica ou Continental, apesar de ter apenas 500 mil quilômetros quadrados, apresenta oito unidades políticas, sendo sete países independentes e uma área de dominação norte-americana (Zona do Canal do Panamá).
Do ponto de vista político, essa fragmentação é conseqüência da ação colonial e posterior interferência dos EUA na região. Hoje a região apresenta grande instabilidade em decorrência principalmente do choque entre os movimentos socialistas e os interesses locais aliados aos EUA (especial na Nicarágua e em El Salvador).

QUESTÃO 11 *Caracterize a distribuição espacial da população do Japão.*

RESOLUÇÃO: A população japonesa, apesar da elevada densidade demográfica (320 hab/km²), é mal distribuída pelo arquipélago. Sua concentração maior se dá nas planícies litorâneas do sul, voltadas para o Pacífico (área urbano-industriais). As zonas do interior são ocupadas por montanhas vulcânicas, e as áreas ao norte apresentam climas frios, sendo por isso as menos povoadas.

QUESTÃO 12 *Nos anúncios de imóveis de São Paulo, é comum realçar a qualidade de ser "face norte". Tal qualidade seria importante também nas cidades de Belém do Pará ou Nova York? Explique.*

RESOLUÇÃO: Não. Tal qualidade está ligada ao grau de insolação, que depende da latitude e da direção para a qual o imóvel está voltado. Em Belém, próximo a latitude zero (Equador), a insolação é perpendicular, e portanto não há preferência pela face norte ou sul. Já em Nova Iorque, cidade do hemisfério norte com perto de 50° de latitude, a insolação é maior na face sul, pois o sol, durante o ano, está "percorrendo" a zona intertropical, ao sul dos EUA.

QUESTÃO 13

a) Em fevereiro de 1986 a FUVEST realizou um "pequeno vestibular", cuja taxa de inscrição foi de Cz$ 100,00. Como a inflação acabou em fevereiro, essa mesma taxa foi cobrada em setembro, para o vestibular de 1987. Qual deveria ter sido a taxa do vestibular de 1987 se a taxa de inflação tivesse sido de 10% ao mês? Observe que de fevereiro a setembro transcorreram 7 meses. Despreze os centavos.

b) A tarifa dos ônibus da cidade de São Paulo teve um "realinhamento", aumentando de Cz$ 1,50 para Cz$ 3,50. Qual deverá ser o valor da taxa do vestibular FUVEST-1988 se o aumento percentual for igual ao da passagem de ônibus? Despreze os centavos.

RESOLUÇÃO:

a) Sendo T a taxa de inscrição a ser cobrada em setembro caso houvesse uma taxa de inflação de 10% ao mês, temos que $T = 100 \cdot 1{,}1^7$. (cruzados)

Repare que: $1{,}1^1 = 1{,}1$

$1{,}1^2 = 1{,}1 \cdot 1{,}1 = 1{,}21$

$1{,}1^3 = 1{,}1^2 \cdot 1{,}1 = 1{,}331$

$1{,}1^4 = 1{,}1^3 \cdot 1{,}1 = 1{,}4641$

Daí concluímos que $1{,}1^7 = 1{,}1^4 \cdot 1{,}1^3 = 1{,}9487171$.

Desprezando os centavos, segue que a taxa T seria de 194 cruzados.

b) Sendo T a taxa do vestibular FUVEST-1988 e considerando as condições do enunciado, teremos que:

$$\frac{T}{100} = \frac{3{,}50}{1{,}50} \Rightarrow T = 100 \cdot \frac{3{,}5}{1{,}5} \cong 233{,}33$$

Desprezando os centavos, tem-se que a taxa do vestibular FUVEST-1988 seria de 233 cruzados.

QUESTÃO 14

Considere no campo complexo a equação $x^2 - 4x - c = 0$.

a) Prove que ela tem raízes reais distintas qualquer que seja o número real positivo c.

b) Resolva a equação para $c = -5$.

RESOLUÇÃO: $x^2 - 4x - c = 0$

a) Calculemos o discriminante Δ dessa equação:

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-c)$

$\Delta = 16 + 4c$

sendo c um nº real positivo ou seja, $c > 0$ temos $\Delta > 16$. Como $\Delta > 0$, a equação terá duas raízes reais e distintas.

b) $c = -5 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$.

$\Delta = 16 + 4 \cdot (-5) = -4 = 4 \cdot (-1)$

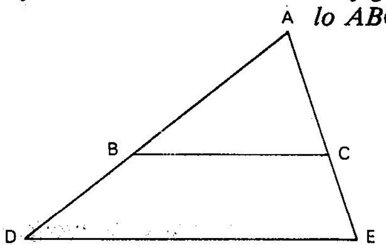
$\Delta = 4i^2$

$$\therefore\ x = \frac{4 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} \begin{cases} x = 2 + i \\ \text{ou} \\ x = 2 - i \end{cases}$$

$\therefore\ S = \{2 + i, 2 - i\}$

QUESTÃO 15

Na figura, BC é paralela a DE, AB = 4 e BD = 5. Determine a razão entre as áreas do triângulo ABC e do trapézio BCDE.



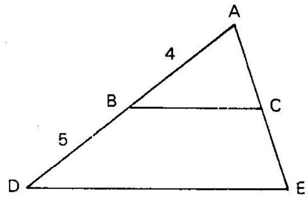
RESOLUÇÃO:

1) $BC \parallel DE \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$

2) $\dfrac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{9}{4}\right)^2 = \dfrac{81}{16}$

3) $\dfrac{S_{ADE} - S_{ABC}}{S_{ABC}} = \dfrac{81 - 16}{16} \therefore \dfrac{S_{BCDE}}{S_{ABC}} = \dfrac{65}{16}$

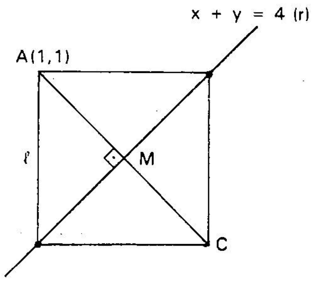
4) $\dfrac{S_{ABC}}{S_{BCDE}} = \dfrac{16}{65}$



QUESTÃO 16

Uma das diagonais de um quadrado está contida na reta x + y = 4. Determine seus vértices sabendo que um deles é o ponto (1, 1).

RESOLUÇÃO:



O ponto M é a projeção ortogonal de A sobre a reta r. Como M pertence à reta r, então suas coordenadas são da forma $(a, 4 - a)$.

Por outro lado como a reta $\overleftrightarrow{MA}$ é perpendicular à reta r, o seu coeficiente angular é 1.

Assim: $\dfrac{4 - a - 1}{a - 1} = 1 \Rightarrow a = 2$ logo M(2,2)

Sendo C o vértice simétrico de A em relação à reta r, então C = (3,3)

A medida ℓ do lado do quadrado é tal que

$\overline{AC} = \ell\sqrt{2} \Rightarrow \ell = \dfrac{\overline{AC}}{\sqrt{2}}$

Então: $\ell = \dfrac{\sqrt{(3-1)^2 + (3-1)^2}}{\sqrt{2}} = 2$

Os outros dois vértices pertencem à reta r e distam 2 unidades do vértice A. Assim sendo as coordenadas destes dois vértices são da forma $(t, 4 - t)$ e podemos escrever:

$\sqrt{(t-1)^2 + (4 - t - 1)^2} = 2$

$(t-1)^2 + (3-t)^2 = 4$

$t^2 - 4t + 3 = 0 \begin{cases} t = 1 \\ \text{ou} \\ t = 3 \end{cases}$

donde conclui-se que estes dois vértices são (1,3) e (3,1).

Resposta: (1,1), (3,3), (1,3) e (3,1) são os vértices do quadrado.

QUESTÃO 17

Um problema tem exatamente duas respostas corretas. Cinco pessoas resolveram o problema e encontraram como respostas, respectivamente:
1 e 4; 2 e 4; 2 e 5; 3 e 5; 4 e 6.
Sabe-se que uma das pessoas errou as duas respostas e as demais acertaram uma das respostas e erraram a outra. Quais são as respostas corretas?
(Deixe um esboço de sua resolução).

RESOLUÇÃO:

Sejam A, B, C, D e E as pessoas que responderam respectivamente: 1 e 4; 2 e 4; 2 e 5; 3 e 5; 4 e 6.

Do enunciado temos as seguintes condições:

(I) Somente uma pessoa errou as duas respostas.

(II) Nenhuma pessoa acertou as duas respostas e as seguintes possibilidades:

1ª) *A errou as duas respostas (1 e 4):*

Temos das respostas de B e E e da condição (I) que 2 e 6 são as respostas corretas. Mas D não respondeu 2 e nem 6, o que contraria a condição (I).

2ª) *B errou as duas respostas (2 e 4):*
Temos das respostas de A e C e da condição (I) que 1 e 5 são as respostas corretas. Mas E não respondeu 1 e nem 5, o que contraria a condição (I).
3ª) *C errou as duas respostas (2 e 5):*
Temos das respostas de B e D e da condição (I) que 3 e 4 são as respostas corretas. O que não contraria as condições (I) e (II).
4ª) *D errou as duas respostas (3 e 5):*
Das respostas de C (2 e 5) e pela condição (II) concluímos que a resposta 2 é correta. De onde se pode concluir das respostas de B (2 e 4) e E(4 e 6), pela condição (II) que a resposta 6 é correta. Mas A não respondeu 2 e nem 6, o que contraria a condição (I).
5ª) *E errou as duas respostas (4 e 6):*
Das respostas de A(1 e 4) e B(2 e 4) e da condição (I) concluímos que as respostas 1 e 2 são corretas.
Mas D não respondeu 1 e nem 2, o que contraria a condição (I).
Dos casos acima concluímos que a pessoa C errou as duas questões e as respostas corretas são 3 e 4.

QUESTÃO 18

senx − cosx = m
a) Ache todas as soluções reais da equação acima quando m = 0.
b) Determine todos os valores m para os quais a equação possui soluções reais.

RESOLUÇÃO: senx − cosx = m

Multiplicando a igualdade por $\frac{\sqrt{2}}{2}$, temos:

$$\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{=\cos\frac{\pi}{4}} \cdot \text{senx} - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{=\text{sen}\frac{\pi}{4}}\text{cosx} = \frac{m\sqrt{2}}{2} \;\therefore\; \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{m\sqrt{2}}{2}$$

a) $\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = h\pi,\ h \in \mathbb{Z} \;\therefore\; x = \frac{\pi}{4} + h\pi,\ h \in \mathbb{Z}$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + h\pi,\ h \in \mathbb{Z}\right\}.$$

b) $-1 \leqslant \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1 \;\therefore\; -1 \leqslant \frac{m\sqrt{2}}{2} \leqslant 1$

Multiplicando por $\sqrt{2}$, temos: $-\sqrt{2} \leqslant m \leqslant \sqrt{2}$

QUESTÃO 19

Suponha que $a_1, \ldots, a_{20}$ sejam números reais positivos em progressão geométrica. Sabe-se que $a_1 = 1$, $a_{20} = \sqrt{10}$. Calcule

$$\log a_1 + \log a_2 + \ldots + \log a_{20}.$$

(log indica logaritmo decimal)

RESOLUÇÃO: $\log a_1 + \log a_2 + \ldots + \log a_{20} = \log(a_1 \cdot a_2 \ldots\ldots a_{20}) = \log(a_1 \cdot a_{20})^{20/2} = \log(a_1 \cdot a_{20})^{10}$.
Substituindo pelos valores dados, temos:
$\log a_1 + \log a_2 + \ldots + \log a_{20} = \log(1 \cdot \sqrt{10})^{10} = \log 10^5 = 5.$

QUESTÃO 20

Uma folha de papel de dimensões 6 × 8 é dobrada de modo que dois vértices diagonalmente opostos coincidam. Determine o comprimento do vinco (dobra).

RESOLUÇÃO: O vinco (dobra) EF divide o retângulo ABCD em dois trapézios congruentes, conforme figura 1.

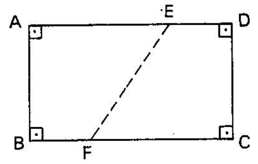


FIG. 1

Após a dobra, conforme figura 2, no triângulo retângulo CDE, temos:

$(8-x)^2 = 6^2 + x^2$

$64 - 16x + x^2 = 36 + x^2 \therefore \qquad x = \frac{7}{4}$

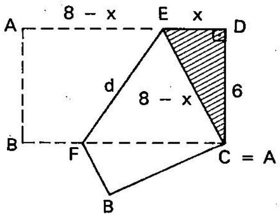


FIG. 2

Na figura 3, traçando FG // AB, no triângulo retângulo EGF temos:

$d^2 = 6^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 \therefore \qquad d = \frac{15}{2}$

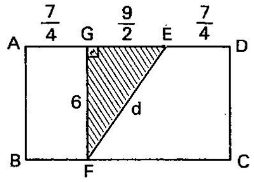


FIG. 3

QUESTÃO 21

Uma matriz 3×3 não nula A satisfaz $A + {}^tA = 0$ (${}^tA$ = transposta de A).
a) Calcule o determinante de A.
b) Determine a característica de A.

RESOLUÇÃO: a) $A + A^t = 0$

$A = -A^t$

segue-se que:

$\det A = \det(-A^t)$

$\det A = (-1)^3 \det A$

$2 \det A = 0$

Portanto $\det A = 0$

b) Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

Então: $A + A^t = 0$

$A = -A^t$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -d & -g \\ -b & -e & -h \\ -c & -f & -i \end{bmatrix}$$

donde conclui-se que: $a = 0$, $e = 0$, $i = 0$, $b = -d$, $c = -g$ e $f = -h$

Podemos escrever $A = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{bmatrix}$

Dizemos que a característica de uma matriz A não nula é "q" quando, obtidas todas as submatrizes quadradas de A tivermos satisfeitas as duas condições seguintes:

a) Uma delas tem ordem q e determinante não nulo.

b) Qualquer outra de ordem q + 1 tem determinante nulo.

Sendo A uma matriz não nula, segue que $b \neq 0$ ou $c \neq 0$ ou $f \neq 0$ e podemos considerar as submatrizes:

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{bmatrix}$$

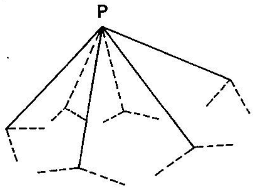
tais que, pelo menos uma delas, tem determinante não nulo.

Por outro lado, sendo A uma matriz não nula e $\det A = 0$ (item a) conclui-se que a característica de A é 2.

QUESTÃO 22

O ponto P é vértice de um poliedro e pertence a k faces. Cada face tem n lados. Determine o número de segmentos contidos nas faces e que unem P a um outro vértice qualquer do poliedro.

RESOLUÇÃO:



P pertence a k faces e n é o número de lados de cada face.
Determinemos o número N de segmentos contidos nas k faces e que unem P a um outro vértice qualquer do poliedro:

$(n - 3)\ k$ ... é o número das diagonais das k faces de extremos em P e em um outro vértice qualquer do poliedro.

k ... é o número de segmentos das faces incidentes em P.

Logo, $N = (n - 3) \cdot k + k$

$N = (n - 2) \cdot k$

QUESTÃO 23

As equações $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ e $x^2 + x - 2 = 0$ têm o mesmo conjunto-solução. Quais os valores possíveis de b, c e d?

RESOLUÇÃO:

$x^3 + bx^2 + cx + d = 0.$

$x^2 + x - 2 = 0.$

Resolvendo a equação $x^2 + x - 2 = 0$, encontramos $x = -2$ ou $x = 1$.
Como as equações dadas possuem o mesmo conjunto solução temos $x = -2$ e $x = 1$ são raízes de $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, sendo que uma das raízes deverá ser dupla.
Supondo $x = -2$ raiz dupla temos:

	1	b	c	d
−2	1	$b - 2$	$4 - 2b + c$	$\boxed{4b - 2c + d - 8}$
−2	1	$b - 4$	$\boxed{12 - 4b + c}$	
1	1	$\boxed{b - 3}$		

$$\left.\begin{array}{l} 4b - 2c + d - 8 = 0 \\ -4b + c + 12 = 0 \\ b - 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b = 3 \\ c = 0 \\ d = -4 \end{array}\right.$$

Supondo $x = 1$ raiz dupla temos:

	1	b	c	d
1	1	$b + 1$	$b + c + 1$	$\boxed{b + c + d + 1}$
1	1	$b + 2$	$\boxed{2b + c + 3}$	
−2	1	b		

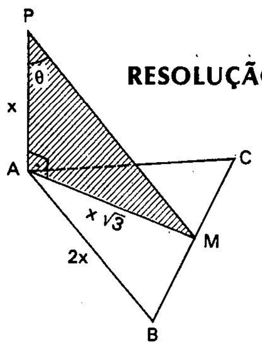
$$\left.\begin{array}{l} b + c + d + 1 = 0 \\ 2b + c + 3 = 0 \\ b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b = 0 \\ c = -3 \\ d = 2 \end{array}\right.$$

Solução: $\left\{\begin{array}{l} b = 3 \\ c = 0 \\ d = -4 \end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{l} b = 0 \\ c = -3 \\ d = 2 \end{array}\right.$

QUESTÃO 24

O segmento PA é perpendicular ao plano que contém o triângulo equilátero ABC. Suponha que AB = 2AP e que M seja o ponto médio do segmento BC. Determine o ângulo formado pelos segmentos PA e PM.

RESOLUÇÃO:



A reta AP é perpendicular a AM, altura do triângulo equilátero ABC.
Indicando: $AP = x$ e θ o ângulo formado pelos segmentos PA e PM, temos

$$AB = 2x \text{ e } AM = \frac{2x\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3}$$

Do $\triangle$ APM, vem:

$$tg\theta = \frac{x\sqrt{3}}{x} = \sqrt{3}$$

Logo, $\theta = 60°$

Cortesia: Resoluções Anglo Vestibulares
(numeração original da FUVEST)