Escola Naval 2009/2010

MARINHA DO BRASIL

DIRETORIA DE ENSINO DA MARINHA

(PROCESSO SELETIVO DE ADMISSÃO À ESCOLA NAVAL / PSAEN-2009)

NÃO ESTÁ AUTORIZADA A UTILIZAÇÃO DE MATERIAL EXTRA

MATEMÁTICA

PROVA DE MATEMÁTICA

1) Ao escrevermos $\dfrac{x^2}{x^4+1}=\dfrac{Ax+B}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\dfrac{Cx+D}{a_2x^2+b_2x+c_2}$ onde a_i, b_i, c_i $(1 \le i \le 2)$ e A, B, C e D são constantes reais, podemos afirmar que A^2+C^2 vale

(A) $\dfrac{3}{8}$

(B) $\dfrac{1}{2}$

(C) $\dfrac{1}{4}$

(D) $\dfrac{1}{8}$

(E) 0

2) Sabendo que a equação $2x = 3\sec\theta$, $\frac{\pi}{2} \langle \theta \langle \pi$ define implicitamente θ como uma função de x, considere a função f de variável real x onde $f(x)$ é o valor da expressão $\frac{5}{2}\cos\sec\theta + \frac{2}{3}sen2\theta$ em termos de x. Qual o valor do produto $(x^2\sqrt{4x^2-9})f(x)$?

(A) $5x^3 - 4x^2 - 9$

(B) $5x^3 + 4x^2 - 9$

(C) $-5x^3 - 4x^2 + 9$

(D) $5x^3 - 4x^2 + 9$

(E) $-5x^3 + 4x^2 - 9$

3) Sejam:

a) f uma função real de variável real definida por $f(x) = arctg\left(\frac{x^3}{3} - x\right)$, $x > 1$ e

b) L a reta tangente ao gráfico da função $y = f^{-1}(x)$ no ponto $(0, f^{-1}(0))$. Quanto mede, em unidades de área, a área do triângulo formado pela reta L e os eixos coordenados?

(A) $\frac{3}{2}$

(B) 3

(C) 1

(D) $\frac{2}{3}$

(E) $\frac{4}{3}$

4) Considere:

a) $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ e $\vec{v}_4$ vetores não nulos no $\Re^3$

b) a matriz $[v_{ij}]$ que descreve o produto escalar de $\vec{v}_i$ por $\vec{v}_j$, $1 \le i \le 4$, $1 \le j \le 4$ e que é dada abaixo:

$$[v_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & 2 & -1 & 2 \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & -1 & 3 & \sqrt{3} \\ \frac{1}{3} & 2 & \sqrt{3} & 4 \end{bmatrix}$$

c) o triângulo ***PQR*** onde $\overrightarrow{QP} = \vec{v}_2$ e $\overrightarrow{QR} = \vec{v}_3$.

Qual o volume do prisma, cuja base é o triângulo ***PQR*** e a altura h igual a duas unidades de comprimento?

(A) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

(B) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

(C) $2\sqrt{5}$

(D) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

(E) $\sqrt{5}$

5) Os gráficos das funções reais f e g de variável real, definidas por $f(x)=4-x^2$ e $g(x)=\dfrac{5-x}{2}$ interceptam-se nos pontos $A=(a,f(a))$ e $B=(b,f(b))$, $a\le b$. Considere os polígonos $CAPBD$ onde C e D são as projeções ortogonais de A e B respectivamente sobre o eixo x e $P(x,y)$, $a\le x\le b$ um ponto qualquer do gráfico da f. Dentre esses polígonos, seja Δ, aquele que tem área máxima. Qual o valor da área de Δ, em unidades de área ?

(A) $\dfrac{530}{64}$

(B) $\dfrac{505}{64}$

(C) $\dfrac{445}{64}$

(D) $\dfrac{125}{64}$

(E) $\dfrac{95}{64}$

6) Considere a função real f de variável real e as seguintes proposições:

I) Se f é contínua em um intervalo aberto contendo $x = x_0$ e tem um máximo local em $x = x_0$ então $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$.

II) Se f é derivável em um intervalo aberto contendo $x = x_0$ e $f'(x_0) = 0$ então f tem um máximo ou um mínimo local em $x = x_0$.

III) Se f tem derivada estritamente positiva em todo o seu domínio então f é crescente em todo o seu domínio .

IV) Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ é infinito então $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^{g(x)} = 1$.

V) Se f é derivável $\forall x \in \Re$, então $\lim\limits_{s \to 0} \dfrac{f(x) - f(x - 2s)}{2s} = 2f'(x)$.

Podemos afirmar que

(A) todas são falsas

(B) todas são verdadeiras

(C) apenas uma delas é verdadeira

(D) apenas duas delas são verdadeiras

(E) apenas uma delas é falsa

7) Nas proposições abaixo, coloque, na coluna à esquerda (V) quando a proposição for verdadeira e (F) quando for falsa.

( ) Dois planos que possuem 3 pontos em comum são coincidentes.

( ) Se duas retas r e s do $\Re^3$ são ambas perpendiculares a uma reta t, então r e s são paralelas.

( ) Duas retas concorrentes no $\Re^3$ determinam um único plano.

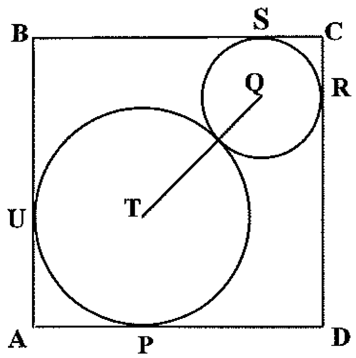
( ) Se dois planos A e B são ambos perpendiculares a um outro plano C, então os planos A e B são paralelos.

( ) Se duas retas r e s no $\Re^3$ são paralelas a um plano A então r e s são paralelas.

Lendo a coluna da esquerda, de cima para baixo, encontra-se

(A) F F V F F
(B) V F V F F
(C) V V V F F
(D) F V V F V
(E) F F V V V

8) As circunferências da figura abaixo possuem centro nos pontos T e Q, têm raios 3cm e 2cm ,respectivamente, são tangentes entre si e tangenciam os lados do quadrado ABCD nos pontos P,R,S e U.



Qual o valor da área da figura plana de vértices P,T,Q,R,e D em cm^2?

(A) $\dfrac{(7\sqrt{2}+18)}{2\sqrt{2}}$

(B) $\dfrac{(50\sqrt{2}+23)}{8}$

(C) $\dfrac{(15\sqrt{2}+2)}{4}$

(D) $\dfrac{(30\sqrt{2}+25)}{4}$

(E) $\dfrac{(50\sqrt{2}+49)}{4}$

9) Considere um tanque na forma de um paralelepípedo com base retangular cuja altura mede $0.5m$, contendo água até a metade de sua altura. O volume deste tanque coincide com o volume de um tronco de pirâmide regular de base hexagonal, com aresta lateral $5\,cm$ e áreas das bases $54\sqrt{3}\,cm^2$ e $6\sqrt{3}\,cm^2$ respectivamente. Um objeto, ao ser imerso completamente no tanque faz o nível da água subir $0.05\,m$. Qual o volume do objeto em cm^3?

(A) $\dfrac{51\sqrt{3}}{10}$

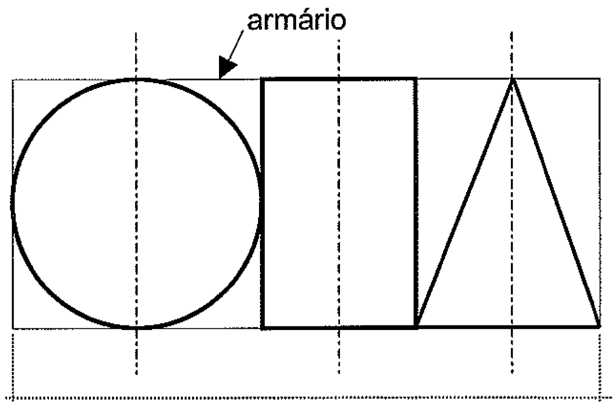
(B) $\dfrac{63\sqrt{3}}{10}$

(C) $\dfrac{78\sqrt{3}}{10}$

(D) $\dfrac{87\sqrt{3}}{10}$

(E) $\dfrac{91\sqrt{3}}{10}$

10) A figura abaixo mostra-nos um esboço da visão frontal de uma esfera, um cilindro circular reto com eixo vertical e uma pirâmide regular de base quadrada, que foram guardados em um armário com porta, que possui a forma de um paralelepípedo retângulo com as menores dimensões possíveis para acomodar aqueles sólidos. Sabe-se que estes sólidos são tangentes entre si; todos tocam o fundo e o teto do armário; apoiam-se na base do armário; são feitos de material com espessura desprezível; a esfera e a pirâmide tocam as paredes laterais do armário; $120\,cm$ é a medida do comprimento do armário; $4\sqrt{11}\,dm$ é a medida do comprimento da diagonal do armário; e a porta pode ser fechada sem resistência, então, a medida do volume do armário não ocupado pelos sólidos vale



(A) $\dfrac{2^4(2^5-5\pi)}{3}\,dm^3$

(B) $\dfrac{2^4(2^5+5\pi)}{3}\,m^3$

(C) $\dfrac{2^4(2^3-5\pi)}{5}\,dm^3$

(D) $\dfrac{2^4(2^6+10\pi)}{6}\,dam^3$

(E) $\dfrac{2^4(2^6-10\pi)}{6}\,dm^3$

11) Um triângulo retângulo está inscrito no círculo $x^2+y^2-6x+2y-15=0$ e possui dois vértices sobre a reta $7x+y+5=0$. O terceiro vértice que está situado na reta de equação $-2x+y+9=0$ é

(A) $(7,4)$

(B) $(6,3)$

(C) $(7,-4)$

(D) $(6,-4)$

(E) $(7,-3)$

12) Considere as funções reais f e g de variável real definidas por $f(x)=\dfrac{\sqrt{e^{2x-1}-1}}{\ln(4-x^2)}$ e $g(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ respectivamente, A e B subconjuntos dos números reais, tais que A é o domínio da função f e B o conjunto onde g é crescente. Podemos afirmar que $A\cap B$ é igual a

(A) $\left[1,\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{3},+\infty\right[$

(B) $\left[1,2\right[\cup\left]2,+\infty\right[$

(C) $\left]2,+\infty\right[$

(D) $\left[1,\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{3},2\right[$

(E) $\left]\sqrt{3},+\infty\right[$

13) Um paralelepípedo retângulo tem dimensões x, y e z expressas em unidades de comprimento e nesta ordem, formam uma P.G de razão 2. Sabendo que a área total do paralelepípedo mede 252 unidades de área, qual o ângulo formado pelos vetores $\vec{u} = (x-2, y-2, z-4)$ e $\vec{w} = (3,-2,1)$?

(A) $arc\cos\dfrac{\sqrt{14}}{42}$

(B) $arc\,sen\dfrac{5\sqrt{14}}{126}$

(C) $arc\,tg 2\sqrt{5}$

(D) $arc\,tg -5\sqrt{5}$

(E) $arc\sec\dfrac{\sqrt{14}}{3}$

14) No sistema decimal, a quantidade de números ímpares positivos menores que 1000, com todos os algarismos distintos é

(A) **360**

(B) **365**

(C) **405**

(D) **454**

(E) **500**

15) Qual o valor de $\int sen6x \cos x \, dx$?

(A) $-\dfrac{7\cos 7x}{2}-\dfrac{5\cos 5x}{2}+c$

(B) $\dfrac{7sen7x}{2}+\dfrac{5sen5x}{2}+c$

(C) $\dfrac{sen7x}{14}+\dfrac{sen5x}{10}+c$

(D) $-\dfrac{\cos 7x}{14}-\dfrac{\cos 5x}{10}+c$

(E) $\dfrac{7\cos 7x}{2}+\dfrac{5\cos 5x}{2}+c$

16) Considere x_1, x_2 e $x_3 \in \Re$ raízes da equação $64x^3 - 56x^2 + 14x - 1 = 0$. Sabendo que x_1, x_2 e x_3 são termos consecutivos de uma P.G e estão em ordem decrescente, podemos afirmar que o valor da expressão $sen\left[(x_1 + x_2)\pi\right] + tg\left[(4x_1x_3)\pi\right]$ vale

(A) 0

(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(C) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

(D) 1

(E) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

17) Coloque **F** (falso) ou **V** (verdadeiro) nas afirmativas abaixo, assinalando a seguir a alternativa correta.

( ) Se A e B são matrizes reais simétricas então AB também é simétrica

( ) Se A é uma matriz real $n \times n$ cujo termo geral é dado por $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ então A é inversível

( ) Se A e B são matrizes reais $n \times n$ então $A^2 - B^2 = (A-B).(A+B)$

( ) Se A é uma matriz real $n \times n$ e sua transposta é uma matriz inversível então a matriz A é inversível

( ) Se A é uma matriz real quadrada e $A^2 = 0$ então $A = 0$

Lendo a coluna da esquerda, de cima para baixo, encontra-se

(A) (F) (F) (F) (F) (F)

(B) (V) (V) (V) (F) (V)

(C) (V) (V) (F) (F) (F)

(D) (F) (F) (F) (V) (F)

(E) (F) (F) (V) (V) (V)

18) Seja S o subconjunto de $\Re$ cujos elementos são todas as soluções de $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}|2x+3| > \log_{\frac{1}{3}}|4x-1| \\ \dfrac{(x+4)^5}{(1-5x)^3\sqrt[5]{3x^2-x+5}} \leq 0 \end{cases}$. Podemos afirmar que S é um subconjunto de

(A) $\left]-\infty,-5\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

(B) $\left]-\infty,-3\right]\cup\left[3,+\infty\right[$

(C) $\left]-\infty,-5\right[\cup\left]3,+\infty\right[$

(D) $\left]-\infty,-3\right]\cup\left[2,+\infty\right[$

(E) $\left]-\infty,-2\right[\cup\left[4,+\infty\right[$

19) O raio de uma esfera em dm é igual à posição ocupada pelo termo independente de x no desenvolvimento de $\left(25^{\frac{1}{2}\left(sen^2\frac{x}{2}\right)} + 5^{(1+\cos x)}\right)^{54}$ quando consideramos as potências de expoentes decrescentes de $25^{\frac{1}{2}\left(sen^2\frac{x}{2}\right)}$. Quanto mede a área da superfície da esfera?

(A) $10{,}24\pi\ m^2$

(B) $115600\pi\ cm^2$

(C) $1444\pi\ dm^2$

(D) $1296\pi\ dm^2$

(E) $19{,}36\pi\ m^2$

20) Considere o triângulo ABC dado abaixo, onde M_1, M_2 e M_3 são os pontos médios dos lados AC, BC e AB, respectivamente e k a razão da área do triângulo AIB para a área do triângulo IM_1M_2 e $f(x)=\left(\frac{1}{2}x^3+x^2-2x-11\right)\sqrt{2}$. Se um cubo se expande de tal modo que num determinado instante sua aresta mede $5dm$ e aumenta à razão de $|f(k)|\ {dm}/{\min}$ então podemos afirmar que a taxa de variação da área total da superfície deste sólido, neste instante, vale em ${dm^2}/{\min}$

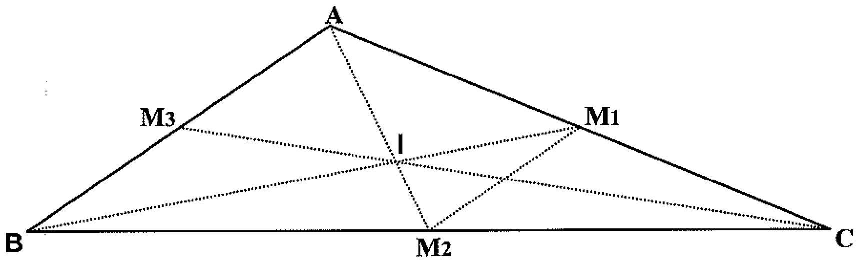
(A) $240\sqrt{2}$

(B) $330\sqrt{2}$

(C) $420\sqrt{2}$

(D) $940\sqrt{2}$

(E) $1740\sqrt{2}$



Gabarito

01. C

02. C

03. B

04. E

05. B

06. A

07. A

08. E

09. C

10. “A” e “E”

11. B

12. D

13. A

14. B

15. D

16. E

17. D

18. D

19. C

20. E