Escola Naval 2006/2007
Matemática
(Rosa)

Concurso de Admissão – 1ª fase - Matemática
Elaborado por Caio dos Santos Guimarães (aluno do ITA)

Gabarito

Comentário:
A prova seguiu o padrão já conhecido de alguns anos. As questões Abrangeram a maior parte dos tópicos mencionados no edital, apresentando as já tradicionais questões de cálculo e geometria analítica no R^3, usuais na prova da Escola. Novamente, voltamos a criticar a banca por questões com erros de enunciado (como tem havido com muita reincidência nos últimos anos) como o da questão 13, e enunciados incompletos como o da questão 5.

O aluno bem preparado, que irá concorrer às vagas, não teve problema em obter os pontos suficientes para se classificar para a próxima fase (acreditamos que novamente fique em torno de 12 questões), mas sem dúvida teve dificuldade para gabaritar a prova.

Fica aqui então exposta a nossa sugestão para que haja uma melhor revisão por parte da banca sobre a prova, antes do dia de aplicação de prova, para que esses pequenos erros não voltem a ocorrer.

Questão 1

Seja r a reta que contém

(i) o ponto de intersecção das retas

$r_1 : x = 2 + 3t, y = 4 + 5t, z = 2t$

$r_2 : \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{4} = z + 2$

(ii) O ponto médio dos pontos A(1,0,-1) e B(3,-4,3). As equações de r são:

a) $x = -1 - 3t;\ \ y = -1 - t;\ \ z = -2 + 3t$

b) $x = 1 + 3t;\ \ y = -1 - t;\ \ z = -2 + 3t$

c) $\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{3}$

e) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}$

d) $x = 3 + 2t;\ \ y = -1 - 2t;\ \ z = 3 + t$

(i) Sabemos que a interseção entre r e s deve pertencer a ambas as retas, logo o ponto interseção P deve ser de ambas as formas: (2+3t,4+5t,2t) e (2k-1, 4k-1,k-2).

Achando t e k para que isso seja verdade:

$$\begin{cases} 2 + 3t = 2k - 1 \\ 4 + 5t = 4k - 1 \\ 2t = k - 2 \end{cases} \quad \therefore \quad t = -1 \quad \Rightarrow \quad P = (-1, 1, 2)$$

(ii) O ponto médio de AB, denotado por M é : $M = \frac{A+B}{2} = (2, -2, 1)$

Logo, temos um vetor diretor à reta r, que passa pelo ponto P=(-1,1,2):

$\overrightarrow{MP} = P - M = (3, -1, 3)$.

Logo a equação da reta é do tipo:

$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{3} = \lambda \in \mathbb{R}$

Resposta: Letra c

Questão 2

Sejam a e b constantes reais positivas, $a \neq b$**. Se x é uma variável real, então** $\int \frac{\left(a^x - b^x\right)^2}{a^x.b^x}.dx$ **é:**

a) $(\ln a - \ln b).\left[\left(\frac{a^x}{b^x}\right) - \left(\frac{b^x}{a^x}\right)\right] - \mathbf{2}x + C$

b) $(\ln b - \ln a).\left[\left(\frac{a^x}{b^x}\right) - \left(\frac{b^x}{a^x}\right)\right] - \mathbf{2}x + C$

c) $\frac{\mathbf{1}}{(\ln a - \ln b)}.\left[\left(\frac{a^x}{b^x}\right) - \left(\frac{b^x}{a^x}\right)\right] - \mathbf{2}x + C$

d) $\left[\left(\frac{a^x}{b^x}\right) - \left(\frac{b^x}{a^x}\right)\right] - \mathbf{2}x + C$

e) $\frac{\mathbf{1}}{(\ln b - \ln a)}.\left[\left(\frac{a^x}{b^x}\right) - \left(\frac{b^x}{a^x}\right)\right] - \mathbf{2}x + C$

Consideremos $f(x) = a^x$**. Temos que:**

$$\ln(f(x)) = x.\ln a \Rightarrow \frac{d}{dx}\ln(f(x)) = \ln a \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln a \qquad \therefore f'(x) = a^x.\ln a$$

Segue então que:

$$\int a^x.dx = \frac{\mathbf{1}}{\ln a}a^x + C^{te} \qquad \textbf{(*)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\left(a^x - b^x\right)^2}{a^x.b^x}.dx = \int \frac{a^{\mathbf{2}x} - \mathbf{2}a^x b^x + b^{\mathbf{2}x}}{a^x.b^x}.dx = \int \left(\frac{a^x}{b^x} + \frac{b^x}{a^x} + \mathbf{2}\right).dx$$

$$= \int \left(\frac{a}{b}\right)^x.dx + \int \left(\frac{b}{a}\right)^x.dx + \int \mathbf{2}.dx \overset{(*)}{=} \frac{\mathbf{1}}{\ln\left(a/b\right)}\left(\frac{a}{b}\right)^x + \frac{\mathbf{1}}{\ln\left(b/a\right)}\left(\frac{b}{a}\right)^x + \mathbf{2}x + C$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\ln a - \ln b}\left(\frac{a}{b}\right)^x - \frac{\mathbf{1}}{\ln a - \ln b}\left(\frac{b}{a}\right)^x + \mathbf{2}x + C = \frac{\mathbf{1}}{\ln a - \ln b}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^x - \left(\frac{b}{a}\right)^x\right] + \mathbf{2}x + C$$

Resposta: Letra c

Questão 3

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -i & 0 \\ 1 & -1 & -i \\ i^3 & 1 & -i \end{pmatrix}$$

com os elementos em $\mathbb{C}$ **. Sendo** $z, z_1 \in \mathbb{C}$**, e** $z = \det(A)$**, então a forma trigonométrica de** $z_1 = z - \frac{1}{z} + \frac{\bar{z}}{2}$ **é:**

b) $\sqrt{2}.\text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ b) $\sqrt{2}.\text{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ c) $2.\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ d) $2.\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ e) 1

$$z = \det(A) = -i + i^5 - i - i^2 = 1 - i$$

$$\begin{aligned} z_1 &= z - \frac{1}{z} + \frac{\bar{z}}{2} = (1 - i) - \frac{1}{1 - i} + \frac{(1 + i)}{2} \\ &= (1 - i) - \frac{(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} + \frac{(1 + i)}{2} \\ &= (1 - i) - \frac{1 + i}{2} + \frac{1 + i}{2} \\ &= 1 - i \\ &= \sqrt{2}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}.\text{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Resposta: Letra b

Questão 4

O conjunto de todos os valores de $\theta \in [0,\pi]$ que satisfazem o sistema

i) $x^2 + x + \operatorname{tg}\theta > \frac{3}{4} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $\frac{1}{\ln\theta} + \frac{1}{1-\ln\theta} > 1$

é:

a) $]1,\pi[$ b) $\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ c) $\left]1,\frac{\pi}{2}\right[$ d) $\left]\frac{\pi}{2},e\right[$ e) $]e,\pi[$

De (i) temos que $x^2 + x + \left(\operatorname{tg}\theta - \frac{3}{4}\right) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$**. Como essa função do 2º grau tem concavidade para cima ela não pode ter raiz para que isso aconteça. Logo, o seu determinante deve ser menor que 0.**

$$\Delta = 1 - 4\left(\operatorname{tg}\theta - \frac{3}{4}\right) < 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta > 1 \qquad \therefore \quad \frac{\pi}{4} < \theta < 2 \quad (*)$$

De (ii)

$$\frac{1}{\ln\theta} + \frac{1}{1-\ln\theta} > 1 \Rightarrow \frac{1}{(\ln\theta)(1-\ln\theta)} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(\ln\theta)(1-\ln\theta)} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{1-\ln\theta+\ln^2\theta}{(\ln\theta)(1-\ln\theta)} > 0$$

O numerador é sempre positivo uma vez que possui determinante negativo para todo $\ln\theta$ real (ou seja para todo θ real). Analisemos o denominador. Como $\ln\theta$ e $1-\ln\theta$ não podem ser simultaneamente negativos temos que:

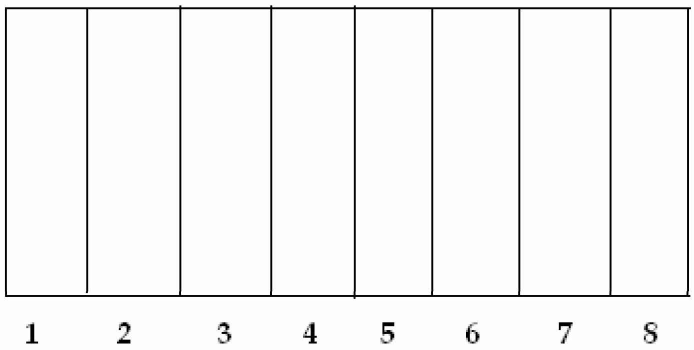
$$\ln\theta > 0 \quad \text{e} \quad 1-\ln\theta > 0 \quad \Rightarrow 0 < \ln\theta < 1 \qquad \therefore \quad 1 < \theta < e \ (**)$$

Da interseção entre (*) e (**): $1 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Resposta: Letra c

Questão 5

Um tapete de 8 faixas deve ser pintado com cores azul, preta e branca. A quantidade de maneiras que podemos pintar esse tapete de modo que as faixas consecutivas não sejam da mesma cor é:
a) 256 b)384 c) 520 d)6561 e) 8574



A primeira faixa tem 3 opções de cor : azul, preta e branca.
A segunda faixa tem 2 opçoes de cor: as 2 restantes excluindo a já escolhida.
O mesmo acontece para a 3ª, 4ª,...., 8ª faixa.

Logo pelo princípio multiplicativo temos que o numero de maneiras de pintar o tapete é:
3.2.2.2.2.2.2.2= 384

Resposta: Letra b

OBS: O enunciado poderia ter sido mais claro quanto como são dispostas essas faixas. Supomos para a nossa resolução que a disposição é feita como na nossa figura.

Questão 6

O gráfico que melhor representa a função

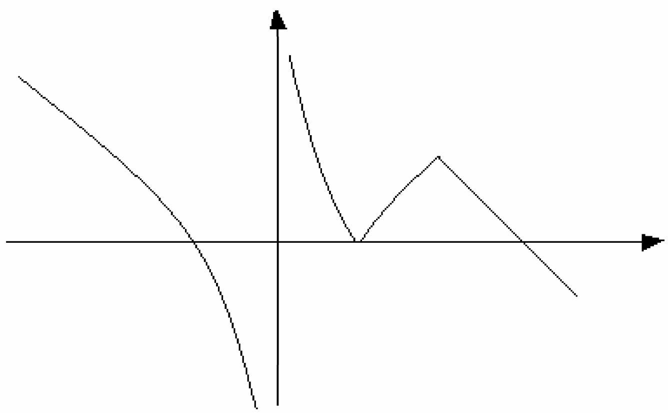
$$f(x)=\begin{cases} |\ln x| & \text{se } 0<x\le e \\ -x+1+e & \text{se } x>e \\ \ln|x| & \text{se } x<0 \end{cases}$$

OBS: Deixamos de lado as opções por comodidade

i) $|\ln x|$ **equivale ao gráfico de lnx acima do eixo das abcissas adicionado ao "espelho" do grafico de lnx abaixo do eixo das abcissas. Notar que lnx está abaixo do eixo das abcissas em 0<x<1 e acima em 1 < x < e (Estamos analisando apenas o primeiro intervalo)**

ii) –x + 1 + e é uma reta que passa pelo ponto (e,1) e (1+e,0)

iii) $\ln|x|$ **equivale ao gráfico espelhado de lnx em relação ao eixo das ordenadas. Isso se deve ao fato de que para cada valor negativo de x, |x| associa o seu valor absoluto (o valor simétrico de x em relação ao eixo y para x negativo) que associará no eixo das ordenadas o valor do logaritmo natural desse valor absoluto.**



Resposta: Letra a

Questão 7

Um tanque de combustível tem a forma de um cilindro circular reto e a sua altura mede 3 metros. O raio da base do cilindro vale, em metros, o dobro da soma dos cubos dos inversos das raízes da equação $x^4+4x^3+8x^2+8x+4=0$. A área lateral do tanque em m², mede:

a)6π b)12π c)18π d)36π e)48π

Sejam a, b, c , d as raízes da equação do 4º grau.
Denotemos por S_k as somas de Girard e $S_k^* = a^k+b^k+c^k+d^k$ as somas de Newton.

Queremos achar: $2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}\right)=2.S_{-3}^*$

- $S_{-2}^* = (a^2+b^2+c^2+d^2) = (a+b+c+d)^2 - 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$

  $= S_1{}^2 - 2.S_2 = (-4)^2 - 2.8 = 0$
- $S_1^* = a+b+c+d = S_1 = -4$
- $S_0^* = a^0+b^0+c^0+d^0 = 4$
- $S_{-1}^* = \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) = \left(\frac{bcd+acd+abd+abc}{abcd}\right) = \frac{S_3}{S_4} = \frac{-8}{4} = -2$

Do teorema de Newton:

- $S_2^* + 4S_1^* + 8S_0^* + 8S_{-1}^* + 4S_{-2}^* = 0 \Rightarrow 0 - 16 + 32 - 16 + 4.S_{-2}^* = 0 \Rightarrow S_{-2}^* = 0$
- $S_1^* + 4S_0^* + 8S_{-1}^* + 8S_{-2}^* + 4S_{-3}^* = 0 \Rightarrow -4 + 16 - 16 + 0 + 4S_{-3}^* = 0 \Rightarrow S_{-3}^* = 1$

Logo o raio da base vale 2

A área lateral é $2\pi rh = 2.\pi.2.3 = 12\pi$

Resposta: letra b

Questão 8

Seja $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **e** $D = \left(d_{ij}\right)_{3x3} = B^2 - 4B + 3I$.

Se o número real $N = \sum_{i=1}^{3}(d_{ii})$ **é o produto escalar dos vetores** $\vec{u} = (2,11,1)$ e $\vec{v} = (5,a,4)$**, então o valor de** $tg2\theta$**, onde** θ **é o ângulo formado entre os vetores u e w vale:**

a) $-\dfrac{\sqrt{6}}{19}$ b) $\dfrac{12\sqrt{3}}{7}$ c) $-\dfrac{17\sqrt{3}}{20}$ d) $-\dfrac{12\sqrt{6}}{19}$ e) $\dfrac{12\sqrt{7}}{20}$

D=B²-4B+3I = (B-I).(B+3I)

Os valores dos elementos da diagonal principal de D pelo produto de matrizes serão: $d_{11} = 6, \quad d_{22} = 36, \quad d_{33} = -6$.

Logo: $N = 36 = (2,11,1) \bullet (5,a,4) = 10 + 11a + 4 \quad \therefore \quad a = 2$

$$\vec{u} \bullet \vec{w} = \|\vec{u}\|.\|\vec{w}\|.\cos\theta \;\Rightarrow\; 36 = \sqrt{2^2 + 11^2 + 1}.\sqrt{5^2 + 2^2 + 4^2}.\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{4}{\sqrt{70}} \;\Rightarrow\; sen\theta = \sqrt{1 - \frac{16}{70}} = \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{70}}$$

$$\Rightarrow tg\theta = \frac{\sqrt{54}}{4} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$$

Com isso: $tg2\theta = \dfrac{2tg\theta}{1 - tg^2\theta} = \dfrac{3\sqrt{6}/2}{1 - (9.6)/16} = \dfrac{12\sqrt{6}}{19}$

Resposta: Letra d

Questão 9

A reta r tangente à curva de equação $x-\sqrt{xy}+y=1$ no ponto P=(x,y) é paralela ao eixo das abcissas. Pode-se afirmar que o ponto P também pertence à reta de equação:

a) $x=0$ b) $y=1$ c) $y-x+2=0$ d) $y-x-1=0$ e) $3y+3x-1=0$

$x-\sqrt{xy}+y=1$

Derivando implicitamente com relação a x dos dois lados, temos:

$$1-\frac{1}{\sqrt{xy}}.\left(y+x.y'\right)+y'=0 \quad (*)$$

No ponto dado, o coeficiente angular de r é 0 (paralela ao eixo das abcissas), logo y´=0.

$$1-\frac{1}{\sqrt{xy}}.\left(y+x.0\right)+0=0 \quad \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{xy}}=1 \quad \Rightarrow \frac{y^2}{4}=xy$$

P deve pertencer à curva.

Temos de (*), que y é diferente de 0, temos: $y=4x$**, e:**

$$x-\sqrt{4x^2}+4x=1 \quad \Rightarrow 5x-|2x|=1 \quad \Rightarrow \begin{cases} \text{Se} \quad x\geq 0 \Rightarrow x=1/3 \\ \text{Se} \quad x<0 \Rightarrow 7x=1 \end{cases}$$

Como a segunda possibilidade não convém, uma vez que y=4x, temos: $P=\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$ **que pertence à reta y- x = 1**

Resposta: Letra d

OBS: Não é dado no problema que y é diferente de 0, mas uma vez que não é possível explicitar essa equação de curva de forma simples (pelo menos nos objetivos da prova) concluímos que a banca quisesse que o candidato usasse derivada implícita (e nesse caso seria necessário mencionar que y é diferente de 0).

Questão 10

As raízes a, b, c da equação $x^3+mx^2-6x+8=0$, m real, representam os 3 primeiros termos de uma progressão aritmética crescente.
Se $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=-\frac{3}{8}$, o valor do 17º termo da PA vale:
a) 38   b) 41   c) 46   d) 51   e) 57

a, b, c estão em PA , então a = b-r, c = b+r , r>0 (PA crescente)
A soma das 3 raízes, por Girard vale –m .

Logo: $m=-(b-r+b+b+r)=-3b$

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=\frac{c+a+b}{abc}=\frac{S_1}{S_3}=\frac{-m}{-8}=-\frac{3}{8} \quad \therefore \quad m=-3 \quad \therefore \quad b=1$$

Logo 1 é raiz. Fatorando (algoritmo de Briot-Ruffini) chegamos a:

$$x^3-3x^2-6x+8=(x-1).(x^2-2x-8)=(x-1)(x+2)(x-4)$$

Logo as raízes são -2, 1, 4 e com isso r=3

A PA tem termo geral: $a_n=a_1+(n-1).r$

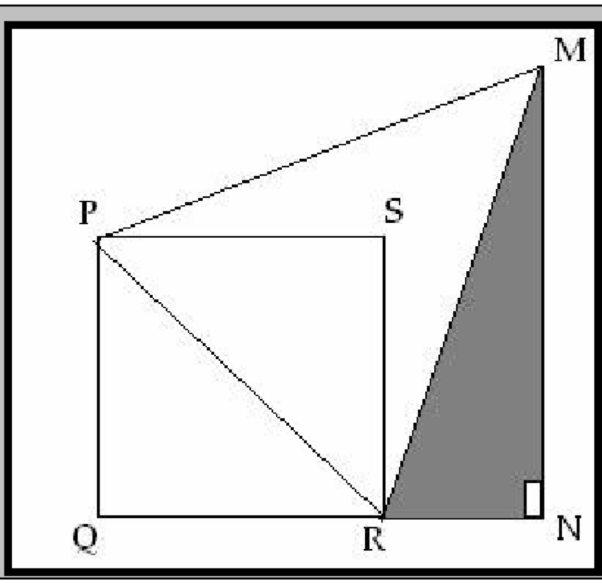
Segue então que:
$a_{17}=-2+(16).3=46$

Resposta: Letra c

Questão 11

Na figura abaixo o triângulo PMR é eqüilátero e o quadrilátero PQRS é um quadrado cujo lado mede 2 cm. A área do triângulo MNR, em cm², vale:

a) $\mathbf{1}$ b) $\sqrt{\mathbf{2}}$ c) $\sqrt{\mathbf{3}}$ d) $\sqrt{\mathbf{6}}$ e) $\sqrt{\mathbf{12}}$



i) $\overline{MR} = \overline{PR} = \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}$ (diagonal do quadrado)

ii) $\measuredangle QRP = \mathbf{45}^\circ$ (pois $\# PQRS$ é quadrado)

$\measuredangle PRM = \mathbf{60}^\circ$ (pois ΔPRM é eqüilátero)

Logo o ângulo $\measuredangle NRM$ vale $\mathbf{180}^\circ - \mathbf{60}^\circ - \mathbf{45}^\circ = \mathbf{75}^\circ$

Temos então que:

$\overline{MN} = \overline{MR}.\text{sen}\mathbf{75}^\circ$

$\overline{RN} = \overline{MR}.\cos\mathbf{75}^\circ$

A área hachurada vale :

$$A = \frac{\left(\overline{MR}.\cos\mathbf{75}^\circ\right).\left(\overline{MR}.\text{sen}\mathbf{75}^\circ\right)}{\mathbf{2}} = \frac{\overline{MR}^2.\left(\mathbf{2}\text{sen}\mathbf{75}^\circ.\cos\mathbf{75}^\circ\right)}{\mathbf{4}}$$

$$= \frac{\overline{MR}^2.\left(\text{sen}(\mathbf{180}^\circ - \mathbf{30}^\circ)\right)}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{8}.\left(\text{sen}(\mathbf{30}^\circ)\right)}{\mathbf{4}} = \mathbf{1}$$

Resposta: Letra a

Questão 12 (colaboração anônima)

Um plano π, ao interceptar os semi-eixos coordenados positivos, determina sobre estes, segmentos iguais. Sabendo que os pontos **P**(1, -1, 2) e **Q**(2, 2, 1) pertencem a um plano α, perpendicular ao plano π, pode-se afirmar que a equação do plano α é igual a

(A) $x-y+2z+2=0$

(B) $x+y+z+2=0$

(C) $2x-y+z-1=0$

(D) $-2x+y+z+1=0$

(E) $-x+y-2z+2=0$

O plano pi, ao interceptar os semieixos coordenados positivos, determina sobre estes, segmentos iguais, então $n(\pi)=(1, 1, 1)$.

$$Q=(2, 2, 1) \text{ e } P=(1, -1, 2)$$
$$PQ=\big((1-2), (-1-2), (2-1)\big) \Rightarrow PQ=(-1, -3, 1)$$

O plano α **é perpendicular ao plano** π**, conclui-se que o segmento PQ está contido no plano** π**. Logo, o produto vetorial entre PQ e** $n(\pi)$ **fornece o vetor normal referente ao plano** α**.**

$$n(\alpha)=PQ\times n(\pi)$$
$$n(\alpha)=(1, 3, -1)\times(1, 1, 1)$$
$$n(\alpha)=(-4, 2, 2)\div 2$$
$$n(\alpha)=(-2, 1, 1)$$
$$\alpha: -2x+1y+1z+d=0$$
$$Q=(2, 2, 1) \text{ pertence a alfa } (\alpha) \Rightarrow -2\times2+1\times2+1\times1+d=0$$
$$d=1, \text{ então:}$$
$$\alpha: -2x+1y+1z+1=0$$

Resposta: letra d

Questão 13

Sejam r e s retas do plano tais que:
i) r possui coeficiente angular positivo e não intercepta a curva de equação $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$ **.**
ii) s é tangente ao gráfico da função real f definida por:
$f(x)e^{x^2-1}.\sqrt{3x-2}+\ln\left[1+(x-1)^4\right]$ **no ponto P(1,1).**
Se I é o ponto de interseção de r e s então a soma de suas coordenadas vale:

a) $\frac{4}{25}$ b) $\frac{11}{17}$ c) $\frac{12}{25}$ d) $\frac{21}{25}$ e) $\frac{16}{17}$

A questão tem enunciado INCORRETO e portanto deverá ser ANULADA. Repare que a primeira informação diz que r possui coeficiente angular positivo e não intercepta a hipérbole de equação dada. Fazendo o gráfico percebemos facilmente que existem infinitas retas que atendem à essa condição, ou seja, o problema tem infinitas respostas. A primeira informação deveria ser reformulada da seguinte forma:
(i)" r é a assíntota de coeficiente angular positivo da hipérbole de equação..."
Faremos a seguir um gabarito para essa questão reformulada.

A assíntota de coeficiente angular positivo será:

$$(y-1)=\frac{2}{3}(x-2) \quad \Rightarrow \quad 3y-3=2x-4 \quad \Rightarrow \quad 3y=2x-1 \quad \textbf{(r)}$$

ii) $f'(x)=(2x).e^{x^2-1}.\sqrt{3x-2}+e^{x^2-1}.\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}+\frac{4.(x-1)^3}{1+(x-1)^4} \therefore \quad f'(1)=\frac{7}{2}$

Logo a reta tangente em (1,1) tem coeficiente angular 7/2. Sua equação será:

$$(y-1)=\frac{7}{2}.(x-1) \quad \Rightarrow \quad 2y=7x-5 \quad \textbf{(s)}$$

A interseção entre r e s virá do sistema: $\begin{cases}3y=2x-1\\2y=7x-5\end{cases} \quad \therefore \quad x=\frac{13}{17}, y=\frac{3}{17}$

Portanto a soma das coordenadas é: $\frac{16}{17}$

Resposta: Letra e

Questão 14

O domínio da função real f de variável real, definida por:

$$f(x)=\frac{\text{Arcsen}\left(\log\left(\frac{x}{\mathbf{10}}\right)\right)}{\sqrt[4]{\mathbf{9}x-x^3}}$$ **é:**

a)$[\mathbf{1},\mathbf{100}]$ b)$]\mathbf{0},\mathbf{3}[\,\text{U}\,(\mathbf{3},\mathbf{100}]$ c)$]\mathbf{1},\mathbf{3}[\,\text{U}\,(\mathbf{3},\mathbf{100}]$

d)$(\mathbf{0},\mathbf{100}]$ e)$[\mathbf{1},\mathbf{3})$

A função arcsenx tem domínio restrito entre -1 e 1.

Logo:

$$\Rightarrow -\mathbf{1}\le\log\left(\frac{x}{\mathbf{10}}\right)\le\mathbf{1}\Rightarrow\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}\le\left(\frac{x}{\mathbf{10}}\right)\le\mathbf{10} \qquad \textbf{(*)}$$

$$\Rightarrow \mathbf{1}\le x\le\mathbf{100}$$

Para que f esteja definida, analisando o denominador:

$$\mathbf{9}x-x^3>\mathbf{0}\Leftrightarrow x(\mathbf{3}-x)(\mathbf{3}+x)>\mathbf{0}$$

Para x< -3: x<0, 3-x > 0 , 3+x>0 Logo 9x-x³ < 0 (não convém)
Para -3 < x < 0 : x < 0 , 3-x > 0 , (3+x)>0. Logo 9x-x³< 0 (não convém)
Para 0 < x < 3: x>0, 3-x >0, 3+x> 0 . Logo 9x-x³ > 0 (convém)
Para 3 < x: x > 0 , 3-x < 0 , 3+x > 0 . Logo 9x-x³ < 0 (não convém)

Logo, para a existência de f , devemos ter: 0 < x < 3 (*)

Da interseção entre (*) e (**): $0<x<\mathbf{3}$

Resposta: Letra e

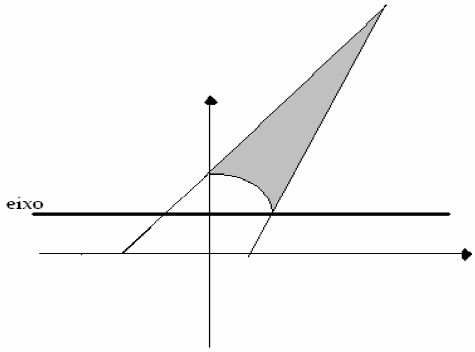
Questão 15

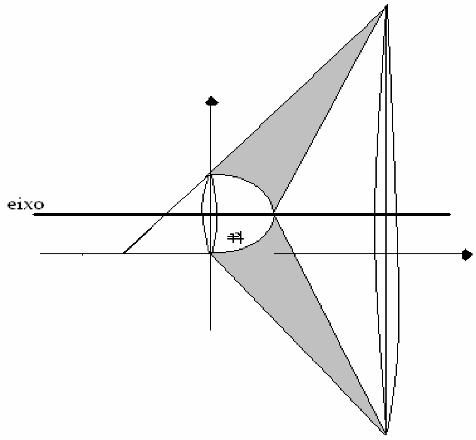
A região R do plano, limitada pela curva de equação $x=\sqrt{2y-y^2}$ **Com y em [0,1], e pelas retas 2y-3x+1=0 e 3y-2x-6=0, gira em torno da reta y=1 gerando um sólido S. O volume de S em unidades de volume é:**

é:

a) $\frac{19\pi}{3}$ b) $\frac{17\pi}{3}$ c) 3π d) $\frac{15\pi}{6}$ e) $\frac{11\pi}{6}$

$x=\sqrt{2y-y^2} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2y=0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+(y-1)^2=1 \\ x\geq 0 \end{cases}$ **que representa um quadrante de circunferência (pois y é maior ou igual a 1). Traçando-se os gráficos das retas chegamos à seguinte ilustração:**





Interseção das retas: $\begin{cases} 2y-3x+1=0 \\ 3y-2x-6=0 \end{cases} \quad \therefore (x,y)=(3,4)$

O volume gerado pela revolução é um tronco de cone (raio menor igual a 1 e raio menor igual a 3) subtraído de uma semi-esfera (raio 1) e de um cone menor (raio da base igual a 3).

$$V=V_{tronco}-V_{semi-esfera}-V_{cone}=\frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr)-\frac{2\pi r^3}{3}-\frac{\pi r^2.(h')}{3}$$

$$=\frac{\pi.3}{3}(9+1+3)-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi 3^2.(2)}{3}=\frac{19\pi}{3}$$

Resposta: Letra a

Questão 16

Considere a matriz $A=\left(a_{ij}\right)_{3x3}$ **tal que** $a_{ij}=(-1)^{i+j}.\frac{2i+j}{3}$**. Seja** $D=2A-A^t$**. Sabendo que**:
$d_{12}=-x-b-2c,\ d_{23}=x-3b+c,\ d_{31}=x+4b+2c$**, onde x, b, c pertencem aos reais, b diferente de x, então o valor de** $\frac{c}{b-x}$ **é:**

a) ¼ b) 1/3 c) 1 d) 3/2 e)5/2

$$2A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ -5 & 6 & -7\\ 7 & -8 & 9\end{pmatrix} \quad \textbf{e} \quad A^t=\begin{pmatrix}3/2 & -5/2 & 7/2\\ -2 & 3 & -4\\ 5/2 & -7/2 & 9/2\end{pmatrix}$$

Logo:

$$D=2A-A^t=A^t=\begin{pmatrix}3/2 & -3/2 & 3/2\\ -3 & 3 & -3\\ 9/2 & -9/2 & 9/2\end{pmatrix}$$

Logo $\begin{cases}-x-b-2c=-3/2\\ x-3b+c=-3\\ x+4b+2c=9/2\end{cases}$ $\therefore b=1, c=1/2, x=-1/2$

Com isso: $\frac{c}{b-x}=\frac{1/2}{1+1/2}=\frac{1}{3}$

Resposta: Letra b

Questão 17

Calcule:

$$\lim_{x\to 1^+} (\ln x).(\ln(x-1))$$

a) $+\infty$ b) e c) 1 d) 0 e) -1

Seja L o limite pedido:

$\lim_{x\to 1^+} (\ln x).(\ln(x-1))$ **dá uma indeterminação do tipo:** $0.(-\infty)$

$$\lim_{x\to 1^+} (\ln x).(\ln(x-1)) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{(\ln(x-1))}^{f}}{\underbrace{1/(\ln x)}_{g}}$$ **dá indeterminação do tipo:** $\frac{-\infty}{\infty}$

Calculemos:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f'}{g'} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1/(x-1)}{-1/x(\ln x)^2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x.(\ln x)^2}{(x-1)}$$ **que dá indeterminação:** $\frac{0}{0}$

Calculemos:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f''}{g''} = \lim_{x\to 1^+} [(\ln x)^2 + 2\ln x] = 0$$

Logo pelo teorema de L´Hospital:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f}{g} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f'}{g'} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f''}{g''} = 0$$

Resposta: Letra d

Questão 18

No universo U=R+, o conjunto solução da inequação $x^{2x^2-9x+4} < 1$ é:

a) $\left[0,\frac{1}{2}\right) U (1,4)$

b) $\left(\frac{1}{2},1\right) U (4,+\infty)$

c) $\left(\frac{1}{2},1\right) U\{0\}$

d) $\left(\frac{1}{2},4\right) U\{0\}$

e) $[0,1) U (1,4)$

$$x^{2x^2-9x+4} < x^0$$

x=1 não é solução, pois obtemos a igualdade 1=1

i) Se $0 \le x < 1$:

$$2x^2 - 9x + 4 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x > 4$$

Mas x está entre 0 e 1, logo: $0 \le x < \frac{1}{2}$

ii) Se $x > 1$:

$$2x^2 - 9x + 4 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 4$$

Mas x deve ser maior que 1, logo: $1 < x < 4$

Logo, de (i) e (ii): $1 < x < 4 \quad \text{ou} \quad 0 \le x < \frac{1}{2}$

Resposta: Letra a

Questão 19

Seja b a menor das abcissas dos pontos de interseção das curvas definidas pelas funções reais de variável real: $f(x) = x^5 - \ln(2x)$ e $g(x) = x^5 - \ln^2(2x)$. O produto de raízes da equação:

$$\frac{x^{\log_5 (x)^{1/5}}}{(2+\log_2 b)^{1/5}} = 5 \text{ é:}$$

a) -1 b) -1/5 c) 1/5 d) 3/5 e) 1

Achemos a interseção de f e g:

$$x^5 - (\ln 2x) = x^5 - \ln^2(2x) \Leftrightarrow \ln(2x).(\ln(2x)-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln 2x = 0 \\ \ln 2x = 1 \end{cases}$$

Que geram os pontos: x=1/2 e x=e/2 (sendo o primeiro desses o de menor abcissa), ou seja b= ½.

Com isso:

$$\frac{x^{\log_5 x^{1/5}}}{2+\log_2 b} = 5 \Leftrightarrow x^{\left(\frac{1}{25}\right).\log_5 x} = 5$$

Aplicando $\log_5$ **dos dois lados:**

$$\left(\frac{1}{25}\right).\log_5 x.\log_5 x = 1 \Leftrightarrow \log_5 x = \pm 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 25 \\ x_2 = \frac{1}{25} \end{cases}$$

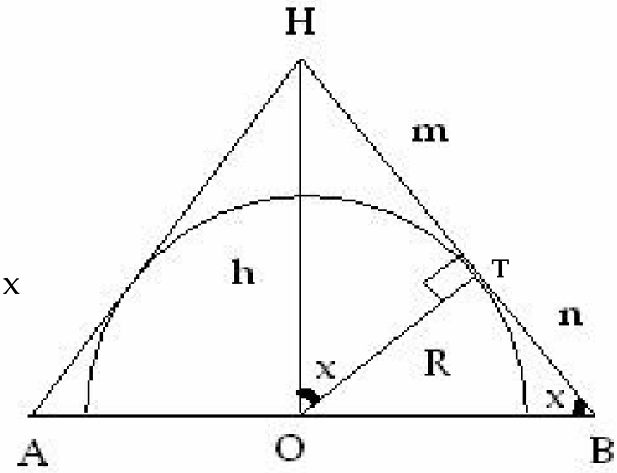
O produto das raízes dá, então, 1.

Resposta: Letra e

Questão 20

O cone circular reto, de volume mínimo, circunscrito a um hemisfério de raio R e apoiado no plano diametral, tem por volume real:

a) $\frac{\pi R^3}{3}$ b) $\frac{\sqrt{3}\pi R^3}{3}$ c) πR^3 d) $\frac{\sqrt{2}\pi R^3}{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}R^3}{2}$



$\Delta TOH: \quad \frac{R}{h} = \cos x \Rightarrow h = R.\sec x$

$\Delta TBO: \quad \frac{R}{\overline{OB}} = \operatorname{sen} x \Rightarrow \overline{OB} = R.\csc x$

Logo, o volume do cone é:

$$V(x) = \frac{\pi}{3}.R^2.\csc^2 x.R.\sec x$$

$$= \frac{\pi}{3}.R^3.\sec x.\csc^2 x.$$

Derivando em relação a x:

$$V'(x) = \frac{\pi R^3}{3}.\left(\csc^2 x.\sec x.\operatorname{tg} x - \sec x.\mathbf{2}\csc x.\csc x.\operatorname{ctg} x\right)$$

$$= \frac{\pi R^3}{3}.\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}.\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{\operatorname{sen}^3 x}\right)$$

$$= \frac{\pi R^3}{3}.\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}.\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{\operatorname{sen}^2 x}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi R^3}{3}.\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}.\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x - 2\cos^2 x}{\cos^2 x.\operatorname{sen}^2 x}\right)\right)$$

Logo

$$V'(x)=0 \Leftrightarrow sen^2x = 2\cos^2x \Leftrightarrow tg^2x = 2 \Leftrightarrow tgx=\sqrt{2} \Leftrightarrow x = Arctg(\sqrt{2})$$

$$\begin{cases} V'(x)>0 \Leftrightarrow tg^2x>2 \\ V'(x)<0 \Leftrightarrow tg^2x<2 \end{cases}$$

V decresce antes de $Arctg(\sqrt{2})$ **e cresce depois. Logo o ponto analisado é um ponto de mínimo. Não é difícil notar que esse ponto é um mínimo global.**

$$\csc^2x = ctg^2x + 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow senx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sec x = \sqrt{3}$$

Com isso:

$$V_{min} = \frac{\pi R^3}{3}.\sec x.\csc^2x = \frac{\pi R^3}{3}.\sqrt{3}.\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi R^3}{2}.\sqrt{3}$$

Resposta: Letra e