Escola Naval 2003
Matemática - Professor Gilson

01. Se $\lim_{x \to 0} (\text{cotg } x)^{\frac{1}{\ln x}} = p$, então:

a) $0 \le p \le \frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{3} < p \le \frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2} < p \le 1$
d) $1 < p \le 2$ e) $2 < p \le 3$

02. O lugar geométrico dos pontos (x, y), para os quais a equação em z:

$z^2 - 4(x-1)z - 4y^2 + 4 = 0$ não admite raízes reais é uma região do plano que tem área igual a:

a) 1 b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) π e) 2π

03. De um ponto p do cais, João observa um barco AB ancorado. Para um sistema de eixos ortogonais os pontos A e B têm coordenadas respectivamente iguais a (0, 20) e (0, 40), enquanto p encontra-se no semi-eixo positivo das abscissa de. Se o ângulo $A\hat{P}B$ de observação é máximo, então a abscissa de p é igual a:

a) $20\sqrt{2}$ b) $20\sqrt{3}$ c) 20
d) 15 e) 10

04. Com centros nos vértices de um cubo, traçamos oito esferas congruentes cujos raios são iguais à metade da aresta desse cubo. Com centro no ponto de intersecção das diagonais do mesmo cubo, traçamos duas esferas com raios **R** e **r** (R > r) tangentes às oito esferas anteriores. A razão $\frac{R}{r}$ é igual a:

a) $\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $10\sqrt{3}$
d) $2\sqrt{3}$ e) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

05. Uma livraria vai doar 15 livros iguais a 4 bibliotecas. Cada biblioteca deve receber ao menos dois livros. O número de modos que esses livros podem ser repartidos nessa doação, é igual a:

a) 1365 b) 840 c) 240 d) 120 e) 35

06. Representando as raízes da equação

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1+x & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1+x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1+x & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = -1 + i\sqrt{3},$$

no plano complexo, temos dois afixo distintos no:

a) Eixo Real b) Eixo Imaginário
c) 2º quadrante d) 3º quadrante e) 4º quadrante

07. O número de soluções reais da equação $\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = x - 2$ é igual a n; assim, pode-se concluir que:

a) n = 0 b) n = 1 c) n = 2
d) n = 3 e) n > 3

08. Cada termo da sequencia $(1, q, q^2, q^3, ...)$, $q \neq 0$, é igual x vezes o limite da soma dos que o seguem se, e somente se:

a) $-1 < x < 1$ b) $x > 1$ c) $x < -2$ ou $x > 0$
d) $x < -1$ ou $x > 1$ e) $0 < x < 1$

09. Se uma das raízes da equação $x^3 + px^2 + qx + 1 = 0$ é a média harmônica das outras duas, então $9pq - 2q^3$ é igual a:

a) 18 b) 24 c) 27 d) 36 e) 81

10. Os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que correspondem às soluções do sistema $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 8 \end{cases}$ são representados graficamente por:

a) uma reta paralela ao plano xoy.

b) uma reta paralela ao plano xoz.

c) uma reta que passa pela origem.

d) um plano perpendicular ao eixo oy.
e) um único ponto.

11. A todos os aspirantes da Escola Naval foram feitas as seguintes perguntas:

a) Você lê a revista A com frequência?

b) Você lê o jornal B com frequência?

47% responderam SIM apenas à primeira pergunta;

34% responderam SIM à segunda pergunta;

21% responderam SIM as duas.

Então, que porcentagem dos aspirantes respondeu:
I) Não às duas perguntas?

II) Não à primeira pergunta?

III) Não à segunda pergunta?

12. Numa pirâmide triangular regular, o apótema mede 39 cm e o apótema da base mede 15 cm. Interceptando-se esta pirâmide por um plano paralelo a sua base, distante 24 cm de seu vértice, obtém-se um tronco de pirâmide. Calcule o volume deste tronco.

13. Consideramos n uma função real, bijetora, derivável tal que $h'(x) = sen^2(\cos(x+1))$ e $h(0) = 3$. Calcule:

a) A equação da reta normal ao gráfico da função h^{-1} no ponto $(3, h^{-1}, (3))$, onde h^{-1} é a função inversa de h.

b) $(g^1)'(3)$ onde hg é a função real definida por $g(x) = h(e^{2x+1} - 1)$ e g^{-1} é a função inversa de g.

14. São dadas, uma progressão aritmética de 1º termo igual a 2 e a razão r positiva, e uma progressão geométrica de 1º termo igual a 1 e razão negativa q. Subtraindo-se os termos correspondentes das duas progressões na ordem dada, obtemos a sucessão s dada por $(1, 8, 6, 22, \ldots)$. Determine:

a) O décimo terceiro termo da sucessão s.

b) A soma dos treze primeiros termos da sucessão s.

15. Seja

$$f(x) = \begin{cases} e^x - a\,e^{3x} & \text{se } X \le 0 \\ b + 2 sen x + \cos 2x & \text{se } 0 < x \le 2\pi \end{cases}$$

I) Sabendo-se que f é uma função contínua em x = 0 e que x = -1n3 é um ponto critico desta, calcule as constantes reais a e b.

II) Substituindo-se na função f os valores de a e b encontrados em I), determine:

a)Todos os pontos críticos de f.
b) Os pontos de máximo e mínimo relativos da função f.

16. Considere o quadrilátero PQRS, sabendo que:

I) o ponto P é o centro da elipse $x^2 + 2y^2 - 2x - 36y + 159 = 0$;

II) o ponto Q é o vértice da parábola $y^2 - 16y - 3x + 82 = 0$;

III) o ponto R é o ponto interseção das retas $2y - 3x - 3 = 0$ e $2x - 3y + 7 = 0$;

IV) o ponto S é o ponto médio do segmento de reta $\overline{F_1F_2}$, onde F_1 e F_2 são os focos da hipérbole $3x^2 - y^2 + 12x + 12y - 30 = 0$.

Determine:

a) Os ângulos $\angle RSP$ e $\angle QRS$.

b) A área do quadrilátero PQRS.