Escola Naval 2000

Matemática – Primeira fase

1. Num triângulo retângulo, a hipotenusa é o triplo de um dos catetos. Considerando □ o ângulo agudo aposto ao menor lado, podemos afirmar que tg α + sec α é igual a:

(A) $\frac{5}{6}$

(B) $\frac{11\sqrt{2}}{12}$

(C) $\sqrt{2}$

(D) $\frac{11\sqrt{2}}{4}$

(E) $\frac{12 + \sqrt{2}}{4}$

2. Sejam $\vec{u}$ =(-1, 1, 0) e $\vec{v}$ (1, 0, 1) vetores no $\Re^3$. Se □ é p ângulo entre os vetores $(\vec{u} \times \vec{v})$ e $(\vec{u} + 2\vec{v})$, então o valor de $\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{3}\right)$ é:

(A) 0

(B) 1/2

(C) $\sqrt{2}$ / 2

(D) $\sqrt{3}$ / 2

(E) 1

3. Os átomos de uma molécula de determinada substância química se dispõem sobre os vértices de um poliedro convexo, cuja soma dos ângulos de todas as faces vale $2{,}088.10^4$ graus. Sabendo que o poliedro tem 90 arestas, o menor inteiro que se deve somar ao número de faces para obter um quadrado perfeito é:

(A) 1

(B) 4

(C) 7

(D) 8

(E) 17

4. Dividindo-se $(2x^3 - x^2 + mx + 8)$, onde $m \in \Re$, por $(x + 2)$ obtém-se resto igual a (-6). Qual o polinômio que representa o quociente da divisão de $(4x^3 - 7x + 3)$ por $(2x – m)$?

(A) $–2x^2 + 3x + 1$

(B) $2x^2 + 2x – 1$

(C) $–x^2 + 2x – 1$

(D) $x^2 + 3x + 1$

(E) $2x^2 - 3x + 1$

5. Considere a equação matricial $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Se (a, b, c) é a solução desta equação, podemos afirmar que $(-5a - 3b - 11c)$ vale:

(A) –2

(B) –1

(C) 0

(D) 1

(E) 2

6. Sabendo que $\log_{10}\left(\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}\right) = 4$, podemos afirmar que $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ é igual a:

(A) 1

(B) $\sqrt{10}$

(C) 10

(D) 10^2

(E) 10^4

7. Um tanque cônico circular e reto está sendo construído em uma unidade naval e deverá armazenar 2.592π litros de água. Sabendo que o raio de sua base, a sua altura e a sua geratriz, nesta ordem, estão em progressão aritmética, pode-se dizer que a altura do tanque, em metros, mede:

(A) 2,6

(B) 2,4

(C) 2,2

(D) 1,8

(E) 1,2

8. A reta que passa pelo centro da elipse $x^2 + 4y^2 - 2x + 8y + 1 = 0$ e pelo vértice da parábola $x^2 - 4x - 2y + 12 = 0$ tem equação dada por:

(A) $y + 3x - 2 = 0$

(B) $y + x - 6 = 0$

(C) $-y + 3x - 2 = 0$

(D) $y - 5x + 6 = 0$

(E) $-y - 2x + 8 = 0$

9. ANULADA

10. Um aspirante ganhou, em uma competição na Escola Naval, quatro livros diferentes de Matemática, três livros diferentes de Física e dois livros diferentes de Português. Querendo manter juntos aqueles da mesma disciplina, concluiu que poderia enfileirá-los numa prateleira de sua estante, de diversos modos. A quantidade de modos com que poderá fazê-lo é:

(A) 48

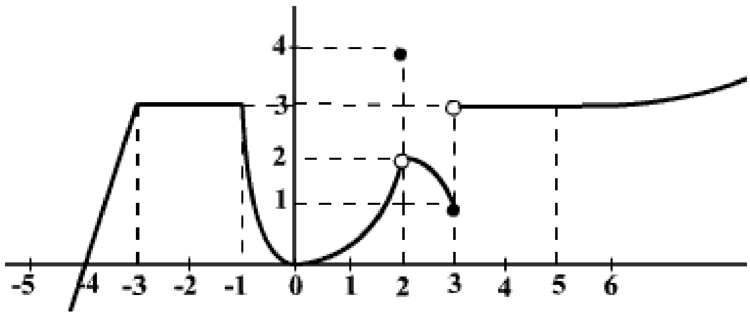
(B) 72

(C) 192

(D) 864

(E) 1728

11. Seja y = f(x) uma função real cujo gráfico está representado acima. Nas proposições abaixo, coloque C na coluna à direita quando a proposição for certa e E quando for errada:



I. f(x) é positiva e contínua $\forall x \in [-4,5]$ ( )

II. $f(0) = f(-4) = 0$ e $f(2) = 2$ ( )

III. $f'(4) > 0$ e $f'(x) = 3 \ \forall x \in]3, 5[$ ( )

IV. f(x) é crescente $\forall x \in]-\infty, -3[\cup]0, 2[\cup]5, +\infty[$ ( )

V. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 3$ e $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$ ( )

Lendo a coluna da direita de cima para baixo encontramos:

(A) E E E C C

(B) E C E C E

(C) E E E C E

(D) C C E E E

(E) C C C C E

12. Seja P o ponto de interseção da reta de equações paramétricas x = t + 1, y = 2t – 3 e z = -t + 2 com o plano xy. Qual é a distância do ponto P ao centro da esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 2x - 2y + 4z$?

(A) $\sqrt{2}$

(B) $\sqrt{3}$

(C) $2\sqrt{2}$

(D) $2\sqrt{3}$

(E) $\sqrt{14}$

13. ANULADA

14. A reta tangente à curva de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ no ponto P(3, 12/5) é dada por:

(A) 20y + 9x = 75

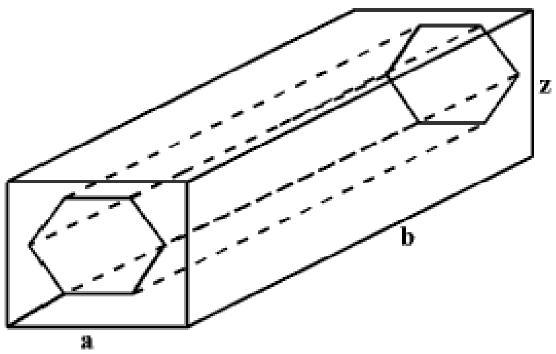
(B) 5y – 5x = 3

(C) 5y + 15x = 51

(D) 20y – 9x = 45

(E) y – 5x = 75

15. Um navio da marinha do Brasil utiliza em sua praça de máquinas uma peça de aço maciça com a forma de um paralelepípedo retangular de dimensões a, b e c, transpassado por um furo hexagonal, como mostra a figura acima. Sabendo que a = 14 dm, b = 15 $\sqrt{3}$ dm, c = 10 $\sqrt{3}$ e que o perímetro da seção transversal (hexágono) do furo é 24 dm, pode-se dizer que o volume da peça é:



(A) inferior a 4.000 dm³

(B) superior a 4.000 dm³ e inferior a 4.200 dm³

(C) superior a 4.200 dm³ e inferior a 4,500 dm³

(D) superior a 4.500 dm³ e inferior a 5.000 dm³

(E) superior a 5.000 dm³,

Gabarito

1. C
2. B
3. B
4. E
5. C
6. D
7. B
8. D
9. X
10. E
11. A
12. D
13. X
14. A
15. E

Escola Naval 2000
Testes
Matemática - Mentor (resoluções)

Questão 1

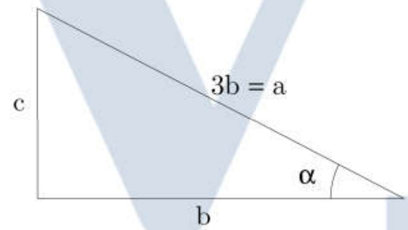
Num triângulo retângulo, a hipotenusa é o triplo de um dos catetos. Considerando α o ângulo agudo oposto ao menor lado, podemos afirmar que $\text{tg}\ \alpha + \sec\ \alpha$ é igual a:

a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{11\sqrt{2}}{12}$ c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{11\sqrt{2}}{4}$ e) $\frac{12+\sqrt{2}}{4}$

Solução:

Seja o triângulo do enunciado de lados **a**, **b** e **c**, em que **a** é a **hipotenusa** e **b** e **c** são os **catetos**, sendo $b > c$.

Hipótese 1: A hipotenusa é o triplo do cateto b, ou seja, $a = 3b$. Teremos a figura abaixo:



Calculando $\text{tg}\ \alpha + \sec\ \alpha$ encontramos:

$$\text{tg}\ \alpha + \sec\ \alpha = \frac{c}{b} + \frac{3b}{b}$$

Como o triângulo é retângulo, vale o Teorema de Pitágoras:

$$(3b)^2 = b^2 + c^2$$

O que nos dá:

$$9b^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow b^2 = \frac{c^2}{8}$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados desta equação (podemos descartar os módulos, pois **b** e **c** são ambos **positivos**):

$$b = \frac{c}{2\sqrt{2}}$$

Voltando na expressão inicial:

$$\text{tg }\alpha + \sec\alpha = \frac{c}{\frac{c}{2\sqrt{2}}} + 3 \Rightarrow \text{tg }\alpha + \sec\alpha = 2\sqrt{2} + 3$$

Não há opção.

Hipótese 2: A hipotenusa é o triplo do cateto c, ou seja, $a = 3c$. Teremos a figura abaixo:

Calculando $\text{tg }\alpha + \sec\alpha$ encontramos:

$$\text{tg }\alpha + \sec\alpha = \frac{c}{b} + \frac{3c}{b}$$

Como o triângulo é retângulo, vale o Teorema de Pitágoras:

$$(3c)^2 = b^2 + c^2$$

O que nos dá:

$$9c^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow c^2 = \frac{b^2}{8}$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados desta equação (podemos descartar os módulos, pois **b** e **c** são ambos **positivos**):

$$c = \frac{b}{2\sqrt{2}}$$

Voltando na expressão inicial:

$$\text{tg }\alpha + \sec\alpha = \frac{4 \cdot \frac{b}{2\sqrt{2}}}{b} \Rightarrow \text{tg }\alpha + \sec\alpha = \frac{4}{2\sqrt{2}}$$

Racionalizando:

$$\text{tg }\alpha + \sec\alpha = \frac{4}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{tg }\alpha + \sec\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{tg }\alpha + \sec\alpha = \sqrt{2}$$

Opção C

Questão 2

Sejam $\vec{u} = (-1,1,0)$ e $\vec{v} = (1,0,1)$ vetores no $\mathbb{R}^3$. Se θ é o ângulo entre os vetores $(\vec{u} \times \vec{v})$ e $(\vec{u} + 2\vec{v})$, então o valor de $\text{sen}\left(\frac{\theta}{3}\right)$ é:

a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) 1

Solução:

Primeiro calcularemos os vetores $(\vec{u}\times\vec{v})$ e $(\vec{u}+2\vec{v})$:

1) $(\vec{u}\times\vec{v}) = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Usando a regra de Sarrus:

$$\det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \vec{i}\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot\vec{j}\cdot 0 + (-1)\cdot 0\cdot\vec{k} - \left[1\cdot 1\cdot\vec{k} + 0\cdot 0\cdot\vec{i} + 1\cdot(-1)\cdot\vec{j}\right]$$

Portanto,

$$\det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$$

Ou seja,

$$(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{i}+\vec{j}-\vec{k} = (1,1,-1)$$

2) $(\vec{u}+2\vec{v}) = (-1+2\cdot 1, 1+2\cdot 0, 0+2\cdot 1)$

$$(\vec{u}+2\vec{v}) = (1,1,2)$$

Sabemos que:

$$\vec{w}\bullet\vec{t} = |\vec{w}||\vec{t}|\cdot\cos\theta$$

Fazendo $(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{w}$ e $(\vec{u}+2\vec{v}) = \vec{t}$ teremos:

$$(\vec{u}\times\vec{v})\bullet(\vec{u}+2\vec{v}) = (1,1,-1)\bullet(1,1,2)$$

$$(\vec{u}\times\vec{v})\bullet(\vec{u}+2\vec{v}) = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot 2$$

$$(\vec{u}\times\vec{v})\bullet(\vec{u}+2\vec{v}) = 0$$

Quando o produto escalar entre dois vetores é nulo quer dizer que eles são perpendiculares, logo $\theta = 90°$. Daí:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{90°}{3}\right) = \operatorname{sen}\ 30° = \frac{1}{2}$$

Opção B

Questão 3

Os átomos de uma molécula de determinada substância química se dispõem sobre os vértices de um poliedro convexo, cuja soma dos ângulos de todas as faces vale $2{,}088\cdot 10^4$ graus. Sabendo que o poliedro tem 90 arestas, o menor inteiro que se deve somar ao número de faces para obter um quadrado perfeito é:

a) 1 b) 4 c) 7 d) 8 e) 17

Solução:

A soma **S** dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer é dada por:

$$S = (n-2)\cdot 180°$$

Seja f_3 o número de faces que são triângulos, f_4 o número de faces que são quadrados, etc. Ou seja, f_n é o número de faces de **n** lados. Então:

$$f_3 \cdot (3-2) \cdot 180° + f_4 \cdot (4-2) \cdot 180° + f_5 \cdot (5-2) \cdot 180° + \ldots + f_n \cdot (n-2) \cdot 180° = S_T$$

Equivale a soma de todos os ângulos de todas as faces.
Para todos os poliedros convexos vale a relação:

$$3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots + nf_n = 2A$$

Em que **A** é o número de arestas do poliedro. Da primeira relação:

$$f_3 \cdot 180° + 2f_4 \cdot 180° + 3f_5 \cdot 180° + \ldots + (n-2) f_n \cdot 180° = 2,088 \cdot 10^4$$

Colocando 180° em evidência:

$$180°\left[f_3 + 2f_4 + 3f_5 + \ldots + (n-2) f_n\right] = 2,088 \cdot 10^4$$

$$f_3 + 2f_4 + 3f_5 + \ldots + (n-2) f_n = \frac{2,088 \cdot 10^4}{180°}$$

Temos então o sistema:

$$\begin{cases} f_3 + 2f_4 + 3f_5 + \ldots + (n-2) f_n = \dfrac{2,088 \cdot 10^4}{180°} \\ 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots + nf_n = 180 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira:

$$2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + \ldots + 2f_n = 180 - \frac{2,088 \cdot 10^4}{180} \Rightarrow 2(f_3 + f_4 + f_5 + \ldots + f_n) = 180 - \frac{2,088 \cdot 10^4}{180}$$

Portanto:

$$f_3 + f_4 + f_5 + \ldots + f_n = \frac{180 - \dfrac{2,088 \cdot 10^4}{180}}{2}$$

$$f_3 + f_4 + f_5 + \ldots + f_n = \frac{32400 - 20880}{360}$$

$$f_3 + f_4 + f_5 + \ldots + f_n = 32$$

Ou seja, basta somar 4 e teremos 36, um quadrado perfeito.

Opção B

Questão 4

Dividindo-se $(2x^3 - x^2 + mx + 8)$, onde $m \in \mathbb{R}$, por $(x+2)$ obtém-se resto igual a (-6). Qual o polinômio que representa o quociente da divisão de $(4x^3 - 7x + 3)$ por $(2x - m)$?

a) $-2x^2 + 3x + 1$
b) $2x^2 + 2x - 1$
c) $-x^2 + 2x - 1$
d) $x^2 + 3x + 1$
e) $2x^2 - 3x + 1$

Solução: Podemos usar o teorema do resto. Seja $P(x) = (2x^3 - x^2 + mx + 8)$, calculando $P(-2)$:

$$P(-2) = 2(-2)^3 - (-2)^2 + m(-2) + 8$$

$$P(-2) = 2 \cdot (-8) - 4 - 2m + 8$$
$$P(-2) = -16 - 4 - 2m + 8$$
$$P(-2) = -2m - 12$$

Usando o teorema do resto:

$$-2m - 12 = -6$$
$$-2m = 6$$
$$-2m = 6$$
$$m = -3$$

Agora podemos usar o algoritmo de chave (ou o de Briot-Ruffini) para encontrar o polinômio procurado:

$$\begin{array}{r|l}
4x^3 - 7x + 3 & 2x + 3 \\ \cline{2-2}
-4x^3 - 6x^2 & 2x^2 - 3x + 1 \\ \cline{1-1}
-6x^2 - 7x + 3 & \\
6x^2 + 9x & \\ \cline{1-1}
2x + 3 & \\
-2x - 3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Opção E

Questão 5

Considere a equação matricial $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Se (a, b, c) é a solução desta equação, podemos afirmar que $(-5a - 3b - 11c)$ vale:

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

Solução:

Vamos escalonar a matriz para resolver o sistema linear escrito na forma matricial. Primeiro multiplicamos a linha 3 por -1 e somamos com a linha 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Agora multiplicamos a linha 2 por -1 e somamos com a primeira linha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalmente multiplicamos a terceira linha por -2 e somamos com a segunda linha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Voltando à equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y + 6z = 0 \\ 10z = 1 \end{cases}$$

O que nos dá:

$$z = \frac{1}{10}$$

Substituindo na segunda equação:

$$-2y + 6 \cdot \frac{1}{10} = 0$$

$$-2y = -\frac{3}{5}$$

$$y = \frac{3}{10}$$

Substituindo na primeira:

$$x + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{5}$$

Calculando $(-5a - 3b - 11c)$ teremos:

$$(-5a - 3b - 11c) = -5 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) - 3 \cdot \left(\frac{3}{10}\right) - 11\left(\frac{1}{10}\right) = 2 - \frac{9}{10} - \frac{11}{10} = 2 - \frac{20}{10} = 0$$

Opção C

Questão 6

Sabendo que $\log_{10}\left(\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}\right) = 4$, podemos afirmar que $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ é igual a:

a) 1 b) $\sqrt{10}$ c) 10 d) 10^2 e) 10^4

Solução:

Sabemos que:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

Então:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right)$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

Fazendo $x = \frac{y}{2}$:

$$\cos y = 2\cos^2 \frac{y}{2} - 1$$

Isolando $\cos^2 \frac{y}{2}$ teremos:

$$\cos \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{\cos y + 1}{2}}$$

Partindo de $\cos y = 2\cos^2 \dfrac{y}{2} - 1$ podemos escrever:

$$\cos y = 2\left(1 - \text{sen}^2 \frac{y}{2}\right) - 1$$

Isolando $\text{sen}^2 \dfrac{y}{2}$ teremos:

$$\cos y = 2 - 2\text{sen}^2 \frac{y}{2} - 1 \Rightarrow \text{sen}\,\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos y}{2}}$$

Divindindo estes resultados teremos:

$$\frac{\text{sen}\,\frac{y}{2}}{\cos\frac{y}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos y}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos y}{2}}}$$

Como $\text{tg}\ x = \dfrac{\text{sen}\ x}{\cos\ x}$:

$$\text{tg}\ \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}} \Rightarrow \text{tg}^2\ \frac{y}{2} = \frac{1-\cos y}{1+\cos y}$$

Voltando ao enunciado:

$$\log_{10}\left(\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right) = 4 \Rightarrow \log_{10}\left(\text{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}\right) = 4$$

Aplicando a definição de logaritmo:

$$\text{tg}^2\,\frac{\alpha}{2} = 10^4$$

Aplicando a raiz quadrada de ambos os lados:

$$\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = 10^2$$

Opção D

Questão 7

Um tanque cônico circular e reto está sendo construído em uma unidade naval e deverá armazenar 2592π litros de água. Sabendo que o raio de sua base, a sua altura e a sua geratriz, nesta ordem, estão em progressão aritmética, pode-se dizer que a altura do tanque, em metros, mede:

a) 2,6 b) 2,4 c) 2,2 d) 1,8 e) 1,2

Solução:

Seja **r** o raio da base, **h** a altura e **g** a geratriz do cone, podemos então escrever:

$$g^2 = h^2 + r^2$$

Mas de acordo com o enunciado temos a seguinte P.A.:

$$(r, h, g)$$

Das propriedades das P.A.'s:

$$h - r = g - h \Rightarrow 2h = g + r$$

Sabemos que o volume é dado por:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow \frac{1}{3}\pi r^2 h = 2592\pi$$

Substituindo a segunda equação na primeira:

$$g^2 = \left(\frac{g+r}{2}\right)^2 + r^2$$

$$g^2 = \frac{g^2 + 2gr + r^2}{4} + r^2$$

$$4g^2 = g^2 + 2gr + r^2 + 4r^2$$

$$3g^2 - 2gr - 5r^2 = 0$$

$$\Delta = (-2r)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5r^2)$$

$$\Delta = 4r^2 + 60r^2$$

$$\Delta = 64r^2$$

$$g_{1,2} = \frac{-(-2r) \pm \sqrt{64r^2}}{2 \cdot 3} \Rightarrow \begin{cases} g_1 = \dfrac{2r + 8r}{6} \Rightarrow g_1 = \dfrac{10r}{6} \Rightarrow g_1 = \dfrac{5r}{3} \\ g_2 = \dfrac{2r - 8r}{6} \Rightarrow g_2 = \dfrac{-6r}{6} \Rightarrow g_2 = -r \end{cases}$$

Como **g** e **r** são **positivos** a segunda solução **não** é válida. Logo:

$$g = \frac{5r}{3}$$

Voltando à equação:

$$2h = g + r \Rightarrow 2h = \frac{5r}{3} + r \Rightarrow 2h = \frac{8r}{3} \Rightarrow r = \frac{3h}{4}$$

Substituindo na equação do volume:

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 2592\pi \Rightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{3h}{4}\right)^2 h = 2592 \Rightarrow h^3 = \frac{4^2 \cdot 2592}{3}$$

Vamos fatorar o 2592:

$$2592 = 2^3 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 3$$

Então:

$$h^3 = \frac{4^2 \cdot 2^3 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 3}{3} \Rightarrow h = \sqrt[3]{4^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3} \Rightarrow h = 24$$

$$h = 24 \text{ dm} \Rightarrow h = 2,4 \text{ m}$$

Opção B

Questão 8

A reta que passa pelo centro da elipse $x^2 + 4y^2 - 2x + 8y + 1 = 0$ e pelo vértice da parábola $x^2 - 4x - 2y + 12 = 0$ tem equação dada por:

a) $y + 3x - 2 = 0$
b) $y + x - 6 = 0$
c) $-y + 3x - 2 = 0$
d) $y - 5x + 6 = 0$

e) $-y-2x+8=0$

Solução:
Primeiro vamos reescrever a equação da elipse para evidenciar seu centro:

$$x^2+4y^2-2x+8y+1=0$$

Completando os quadrados:

$$(x-1)^2-1+(2y+2)^2-4+1=0$$
$$(x-1)^2+(2y+2)^2=4$$
$$(x-1)^2+[2(y+1)]^2=4$$
$$(x-1)^2+4(y+1)^2=4$$
$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{1}=1$$

O centro, portanto, da elipse é $E(1,-1)$.
Vamos agora "tratar" a equação da parábola:

$$x^2-4x-2y+12=0$$
$$-2y=-x^2+4x-12$$
$$y=\frac{-x^2+4x-12}{-2}$$
$$y=\frac{x^2}{2}-2x+6$$

As coordenadas do vértice de uma parábola são dadas por:

$$(x_v,y_v)=\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$$
$$(x_v,y_v)=\left(-\frac{-2}{2\left(\frac{1}{2}\right)},-\frac{(-2)^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot 6}{4\cdot\frac{1}{2}}\right)$$
$$(x_v,y_v)=\left(2,-\frac{4-12}{2}\right)$$
$$(x_v,y_v)=(2,4)$$

Queremos a reta que passa pelos pontos $E(1,-1)$ e $V(2,4)$. Então, calculando o coeficiente angular:

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0}\Rightarrow m=\frac{4-(-1)}{2-1}\Rightarrow m=5$$

Voltando na equação anterior e substituindo m e um ponto qualquer da reta:

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0}\Rightarrow 5=\frac{y-(-1)}{x-1}\Rightarrow 5x-5=y+1$$
$$y-5x+6=0$$

Opção D

Questão 9

ANULADA

Questão 10

Um aspirante ganhou, em uma competição na Escola Naval, quatro livros diferentes de Matemática, três livros diferentes de Física e dois livros diferentes de Português. Querendo manter juntos aqueles da mesma disciplina, concluiu que poderia enfileirá-los numa prateleira de sua estante, de diversos modos. A quantidade de modos com que poderá fazê-lo é:

a) 48 b) 72 c) 192 d) 864 e) 1728

Solução:

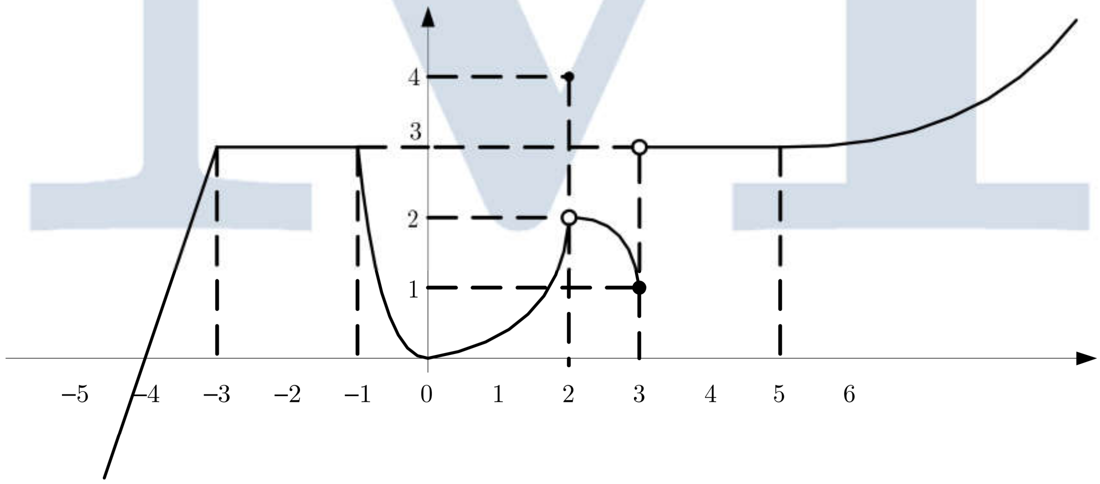
Seja $M_1M_2M_3M_4$ o grupo de livros de matemática; $F_1F_2F_3$, o grupo de livros de física; P_1P_2, o grupo de livros de português. Cada um deles pode permutar entre si e podemos ter a permutação dos três grupos **sem misturar os livros**:

$$\underbrace{\underbrace{[M_1M_2M_3M_4]}_{4!}\underbrace{[F_1F_2F_3]}_{3!}\underbrace{[P_1P_2]}_{2!}}_{3!} = 4!3!2!3! = 24 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 = 1728$$

Opção E

Questão 11

Seja $y = f(x)$ uma função real cujo gráfico está representado abaixo. Nas proposições abaixo, coloque **C** na coluna à direita quando a proposição for **certa** e **E** quando for **errada**:



I	$f(x)$ é positiva e contínua $\forall x \in [-4, 5]$	( )
II	$f(0) = f(-4) = 0$ e $f(2) = 2$	( )
III	$f'(4) > 0$ e $f'(x) = 3\ \forall x \in]3, 5[$	( )
IV	$f(x)$ é crescente $\forall x \in]-\infty, -3[\cup]0, 2[\cup]5, \infty[$	( )

V $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 3$ e $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$ ( )

Lendo a coluna da direita de cima para baixo encontramos:

a) EEECC b) ECECE c) EEECE d) CCEEE e) CCCCE

Solução:
Vamos analisar cada afirmativa:

I) Errada. Para $x = -4$ a função é nula.

II) Errada. $f(2) = 4$.

III) Errada. $f'(4)$ não está definida, pois há uma descontinuidade na função nesta ponto.

VI) Correta. Uma função é crescente se, e somente se, temos que:

$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

V) Correta. Basta aplicar a definição de limite.

Opção A

Questão 12

Seja P o ponto de interseção da reta de equações paramétricas $x = t + 1$, $y = 2t - 3$ e $z = -t + 2$ com o plano xy. Qual é a distância do ponto P ao centro da esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 2x - 2y + 4z$?

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $\sqrt{14}$

Solução:
Vamos encontrar o centro da esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x - 2y + 4z$$
$$x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 4z = 0$$
$$(x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 + (z-2)^2 - 4 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 6$$

O centro **E** da esfera é, portanto:

$$E(1,-1,2)$$

Vamos agora encontrar o ponto **P**. A interseção de um reta com o plano xy se dá quando $z = 0$. Podemos achar então o parâmetro **t**:

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-3 \\ z = -t+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-3 \\ 0 = -t+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-3 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

O ponto **P** tem coordenadas:

$$P(3,1,0)$$

A distância entre os pontos:

$$d = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$
$$d = \sqrt{(3-1)^2 + [1-(-1)]^2 + (0-2)^2}$$

$$d = \sqrt{4+4+4}$$
$$d = \sqrt{12}$$
$$d = 2\sqrt{3}$$

Opção D

Questão 13

ANULADA

Questão 14

A reta tangente à curva de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ no ponto $P\left(3, \frac{12}{5}\right)$ é dada por:

a) $20y + 9x = 75$
b) $5y - 5x = 3$
c) $5y + 15x = 51$
d) $20y - 9x = 45$
e) $y - 5x = 75$

Solução:
Em primeiro lugar, vamos isolar y na equação dada:

$$\frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{25}$$

$$y^2 = 9\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)$$

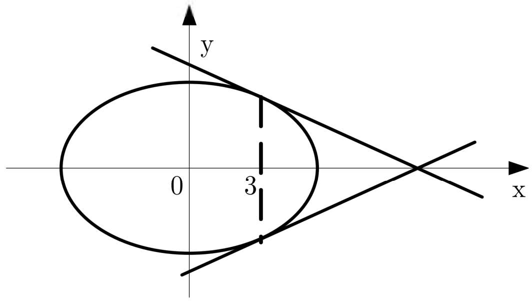
$$y = \pm\sqrt{9\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)} \Rightarrow y = \pm 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$$

Derivando **y** em relação à **x** teremos:

$$y = \pm 3\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \pm 3 \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \left(\frac{-2x}{25}\right) \Rightarrow y' = \pm \frac{3x}{25}\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' = \pm \frac{\frac{3x}{25}}{\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)}}$$

Como o ponto P está no primeiro quadrante, só precisamos considerar a derivada negativa - que corresponde a um coeficiente angular de uma reta decrescente. Basta observar a figura abaixo para ter uma interpretação mais geométrica:



Repare que há realmente duas tangentes para $x = 3$, mas somente uma pertence ao primeiro quadrante. Sendo assim:

$$y' = -\left.\frac{\frac{3\cdot x}{25}}{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{25}\right)}}\right|_{x=3} \Rightarrow y' = -\frac{\frac{3\cdot 3}{25}}{\sqrt{\left(1-\frac{3^2}{25}\right)}} \Rightarrow y' = -\frac{\frac{9}{25}}{\sqrt{\left(\frac{25-9}{25}\right)}}$$

$$y' = -\frac{\frac{9}{25}}{\sqrt{\frac{16}{25}}} \Rightarrow y' = -\frac{\frac{9}{25}}{\frac{4}{5}} \Rightarrow y' = -\frac{9}{25}\cdot\frac{5}{4} \Rightarrow y' = \frac{9}{20}$$

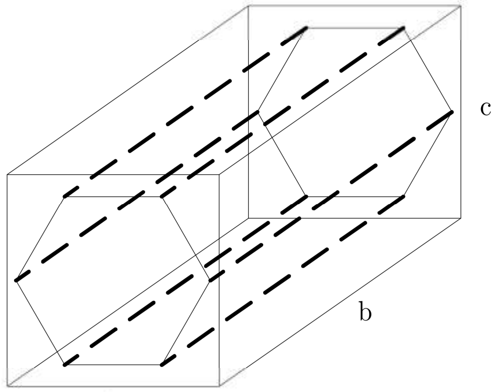
Precisamos agora encontrar a equação da reta de coeficiente angular igual a $m = -\frac{9}{20}$ e que passa pelo ponto **P**:

$$-\frac{9}{20} = \frac{y-\frac{12}{5}}{x-3}$$
$$-(9x-27) = 20y - 48$$
$$20y + 9x - 75 = 0$$

Opção A

Questão 15

Um navio da marinha do Brasil utiliza em sua praça de máquinas uma peça de aço maciça com a forma de um paralelepípedo retangular de dimensões a, b e c, transpassado por um furo hexagonal, como mostra a figura abaixo. Sabendo que $a = 14$ dm, $b = 15$ dm, $c = 10\sqrt{3}$ e que o perímetro da seção transversal (hexágono) do furo é 24 dm, pode-se dizer que o volume da peça é:



a) inferior a 4.000 dm^3
b) superior a 4.000 dm^3 e inferior a 4.200 dm^3
c) superior a 4.200 dm^3 e inferior a 4,500 dm^3
d) superior a 4.500 dm^3 e inferior a 5.000 dm^3
e) superior a 5.000 dm^3

Solução:
Primeiro calculamos o volume do paralelepípedo:

$$V_p = abc$$
$$V_p = 14 \cdot 15 \cdot 10\sqrt{3}$$
$$V_p = 2100\sqrt{3}\ dm^3$$

A parte retirada é um prisma de base hexagonal de perímetro 24 dm, o que nos dá uma aresta de 4 dm.
O volume desse prisma é dado pela expressão:

$$V = \underbrace{6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4}}_{\substack{\text{Área de 6 triângulos} \\ \text{equiláteros de lado 4}}} \cdot 15$$
$$V = 360\sqrt{3}\ dm^3$$

Subtraindo os volumes:

$$V_p - V = 2100\sqrt{3} - 360\sqrt{3}$$
$$V_p - V = 1740\sqrt{3}$$

Como $\sqrt{3} \cong 1,732...$ teremos:

$$V_p - V = 3013,68\ dm^3$$

Opção A