Escola Naval 1998 - Matemática

EN - 98

1) (EN-98) Seja x a solução da equação $\log_7 \sqrt{x+1} + \log_7 \sqrt{x-1} = \frac{1}{2}\log_7 3$. O valor de $z = \log_{2\sqrt{2}} \frac{1}{64} + \log_x 128$ é:

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

solução:

$$\left.\begin{matrix} x+1>0 \\ x-1>0 \end{matrix}\right\} x>1$$

Logo: $\log_7 \sqrt{x^2-1} = \log_7 \sqrt{3}$

$x^2 - 1 = 3$

$x = \pm 2$

$Z = \log_{2^{3/2}} 2^{-6} + \log_2 2^7 = -4 + 7 = 3$

ALTERNATIVA B

2) (EN-98) Sendo **i** a unidade imaginária dos números complexos, o valor do número natural **n** tal que $(2i)^n + (1+i)^{2n} = 64i$ é:

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 9

solução:

$(2i)^n + [(1+i)^2]^n = 64i$

$(2i)^n + (2i + 1 - 1)^n = 64i$

$(2i)^n + (2i)^n = 2^6 i$

$2^{n+1}.i^n = 2^6 i$

$n + 1 = 6$

$n = 5$

ALTERNATIVA B

3) (EN-98) O valor de **m** para que as retas **r** e **s**

r: $\begin{cases} y = mx - 3 \\ z = -2x \end{cases}$ e s: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 5t \end{cases}$ sejam ortogonais é

a) -10 b) -8 c) 4 d) 6 e) 8

solução:

Parametrizando **r**, achamos

$r: \begin{cases} x = t \\ y = mt - 3 \\ z = -2t \end{cases}$ $\vec{u} = (1, m, -2)$

$\vec{v} = (2, -1, 5)$

$\vec{u}.\vec{v} = 0$

$2 - m - 10 = 0$

$m = -8$

ALTERNATIVA B

4) (EN-98) Sendo $y = \text{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, o valor numérico de **y** é

a) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{1}{2}$

d) $\sqrt{3} + 2$ e) $2(\sqrt{3} + 1)$

solução:

$y = \text{sen}\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$

$2y - 1 = 2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1$

$2y - 1 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$y = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}$

ALTERNATIVA A

5) (EN-98) Um hexágono regular está inscrito num círculo de raio 5. Um dos lados do hexágono também é lado de um quadrado construído exteriormente ao hexágono. A distância entre o centro do círculo e a interseção das diagonais do quadrado é

a) $\frac{5}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ b) $5(\sqrt{3} + 1)$ c) $\frac{15}{2}$

d) $5(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ e) $\frac{5(\sqrt{3} + 1)}{2}$

solução:

$\ell_6 = R$

$\frac{R}{2} + \frac{R\sqrt{3}}{2} = d$

$d = 5\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ALTERNATIVA E

6) (EN-98) Considere os conjuntos $A = \left\{x \in R \mid \frac{2x-3}{5x-2} \geq 0\right\}$ e $B = \{x \in R \mid x^2 - 5x + 4 < 0\}$. O conjunto solução $A \cap B$ é

a) $\left[\frac{3}{2}, 4\right[$ b) $\left]\frac{3}{2}, 4\right]$ c) $\left]1, \frac{3}{2}\right]$

d)]1 , 4] e) $\left]-\infty, \frac{2}{5}\right[\cup]4, +\infty[$

solução:

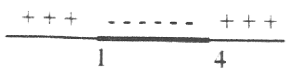
I) $\frac{2x-3}{5x-2} \geq 0$

- - - - - - | + + + + + +
2/5

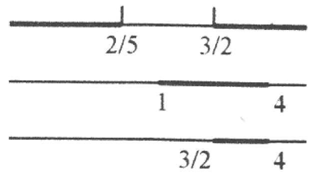
- - - - - - - - - - - - | + + +
3/2

2/5 3/2

II) $x^2 - 5x + 4 < 0$



$I \cap II$



S:

S: [3/2 ; 4[

ALTERNATIVA A

7) (EN-98) O valor de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x^2}$ é

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) $+\infty$

solução:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2}{\lim\limits_{x^2\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}}=1$$

ALTERNATIVA C

8) (EN-98) O valor de $\int_0^{\pi/8} tg^2(2x)dx$

a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{1}{6}$ c) $\sqrt{2}-1$ d) $\dfrac{8\sqrt{2}-3\pi}{24}$ e) $\dfrac{4-\pi}{8}$

solução:

$$\int tg^2(2x)dx=\int\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{\cos^2 2x}dx=\int\frac{1-\cos^2 2x}{\cos^2 2x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 2x}-\int dx$$

Como $\dfrac{dtg2x}{d2x}=\sec^2 2x$, vem:

$$\frac{1}{2}\int\frac{2dx}{\cos^2 2x}-\int dx=\frac{1}{2}\int\sec^2 2xd2x-\int dx=\frac{1}{2}\int dtg2x-\int dx=$$

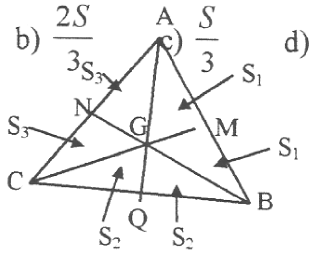
$$=\left[\frac{1}{2}tg2x-x\right]_0^{\pi/8}=\frac{1}{2}tg\frac{2\pi}{8}-\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{4-\pi}{8}$$

ALTERNATIVA E

9) (EN-98) Considere o triângulo ABC de área S, baricentro G e medianas $\overline{CM}$ e $\overline{BN}$. A área do quadrilátero AMGN é igual a

a) $\dfrac{S}{2}$ b) $\dfrac{2S}{3}$ c) $\dfrac{S}{3}$ d) $\dfrac{S}{4}$ e) $\dfrac{3S}{4}$

solução:



$$\left.\begin{array}{l}S_{ABQ}=2S_1+S_2=2S_3+S_2=S_{ACQ}\\ S_{ACN}=2S_3+S_1=2S_2+S_1=S_{BCN}\end{array}\right\rangle S_1=S_2=S_3=S_x\Rightarrow$$

$\Rightarrow 2S_x = S/3$

ALTERNATIVA C

10) (EN-98) Se $a_n=\dfrac{(n+1)!-n!}{n^2[(n-1)!+n!]}$ então a_{1997} é

a) $\dfrac{1997}{1996}$ b) $\dfrac{1}{1998}$ c) 1998!

d) 1997 e) 1

solução:

$$a_n=\frac{n!n}{n^2[(n-1)!+n(n-1)!]}=\frac{n.n(n-1)!}{(n-1)!n^2(n+1)}=\frac{1}{n+1}$$

$$a_{1997}=\frac{1}{1997+1}=\frac{1}{1998}$$

ALTERNATIVA B

11) (EN-98) A relação entre os coeficientes **b** e **c** para que a equação $x^3 + bx + c = 0$ possua duas raízes iguais é

a) $4b^3 + 27c^2 = 0$ b) $b^3 + c^2 = 0$

c) $2b^3 + 3c^2 = 0$ d) $b^3 + c^2 = 0$

e) $3b = c$

solução:

raízes x_1 , x_1 , x_2

$2x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2x_1$ (I)

$x_1^2 + 2x_1x_2 = b$

$x_1^2x_2 = -c$ (II) De I e II, vem:

$x_1^3 = c/2$

Daí temos:

$x_1^2 + 2x_1x_2 = b$

$x_1^3 + 2x_1^2x_2 = bx_1$

$\dfrac{c}{2} - 2c = b\sqrt[3]{\dfrac{c}{2}}$

$-\dfrac{3}{2}c = b\left(\dfrac{c}{2}\right)^{1/3}$

$-\dfrac{27}{4}c^2 = b^3 \Rightarrow 4b^3 + 27c^2 = 0$

ALTERNATIVA A

12) (EN-98) A função $f(x) = x\,e^{1/x}$ é decrescente no intervalo

a)]1 , $+\infty$[b)]$-\infty$, 1[c) $-\infty$, 0[

d)]0 , $+\infty$[e)]0 , 1[

solução:

$y = f(x) = xe^{1/x}$

$y' = e^{1/x} + e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)x = \frac{e^{1/x}}{x}(x-1)$

$y' = 0 \Rightarrow x = 1$

0 1

Analisemos o sinal de y'

$y' > 0$ | $y' < 0$ | $y' > 0$

ALTERNATIVA E

13) (EN-98) Seja P o ponto da circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0$ mais próximo da origem. A soma das coordenadas de P é

a) $\frac{18}{5}$ b) $\frac{7}{2}$ c) $\frac{9}{2}$ d) $\frac{28}{5}$ e) $\frac{13}{2}$

solução:

$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$

$y = \frac{4}{3}x$

$(x - 3)^2 + \frac{16}{9}(x - 3)^2 = 1$

$(x - 3)^2 = \frac{9}{25}$

$x - 3 = \pm\frac{3}{5}$

$x = 3 - \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$

$y = \frac{4}{3}.\frac{12}{5} = \frac{16}{5} \Rightarrow x + y = \frac{28}{5}$

ALTERNATIVA D

14) (EN-98) Considere **r** a reta tangente ao gráfico da função y = f(x) no ponto (1 , f(1)). Sejam f(1) = 3 e f '(1) = 2. Se **r** intercepta o gráfico da função $g(x) = x^2 - 3x + 7$ nos pontos (x_1 , y_1) e (x_2 , y_2) então os valores de y_1 e y_2 são respectivamente

a) 1 e 2 b) 2 e 3 c) 3 e 5
d) 5 e 7 e) 7 e 9

solução:

$y = x^2 - 3x + 7$

$y - 3 = 2(x - 1) =$

$y = 2x + 1$

$2x + 1 = x^2 - 3x + 7$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x' = 2$ e $x'' = 3$

$y = 2.2 + 1 = 5$

$y = 2.3 + 1 = 7$

ALTERNATIVA D

15) (EN-98) A derivada da função f(x) = arc tg $\left(\frac{1}{x}\right)$ é

a) $\frac{x^2}{x^2+1}$ b) $\frac{1}{1+x^2}$ c) $\frac{-1}{1+x^2}$
d) $\frac{-1}{x^2(1+x^2)}$ e) $\frac{1}{x}$

solução:

$y = \text{arc tg}\left(\frac{1}{x}\right)$

$\text{tg } y = \frac{1}{x}$

$\sec^2 y y' = -\frac{1}{x^2}$

$(1 + \text{tg}^2 y)y' = -\frac{1}{x^2}$

$y' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{-1}{1+x^2}$

ALTERNATIVA C

16) (EN-98) A altura de um paralelepípedo retângulo mede 60 cm e sua base é um quadrado. A diagonal do paralelepípedo forma um ângulo de 60° com o plano da base. O volume do paralelepípedo retângulo é em cm^3

a) 12000 b) 18000 c) 24000
d) 27000 e) 36000

solução:

$\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{60}{a\sqrt{2}}$

$a = \frac{60}{\sqrt{6}}$

$V = a^2 . 60$

$V = \frac{60^2}{6}.60 = 36000 \text{ cm}^3$

ALTERNATIVA E

17) (EN-98) Podemos observar que o gráfico de $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

a) cresce em $]-\infty , -1[\cup]0 , 1[$
b) tem (0 , -1) como ponto de inflexão
c) tem assíntota horizontal em y = 1 e assíntota vertical em x = 1 e x = -1
d) tem concavidade voltada para cima qualquer $x \in]-1 , 1[$
e) está definido para todo $x \in R$

solução:

a) $y' = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$

$\forall x \in R / x < 0$, $y' > 0 \Rightarrow$ y sempre cresce

$\forall x \in R / x > 0$, $y' < 0 \Rightarrow$ y sempre decresce

b) $y'' = \frac{12x^2+4}{\left(x^2-1\right)^3} \Rightarrow \nexists x \in R / y'' = 0$ e $y''(0) = -4$ logo zero não é ponto de inflexão.

c) $\lim_{x\to\infty} y = 1$ $y = 1$ é assíntota horizontal

$x = \pm 1$ são pontos de descontinuidade e representam assíntotas verticais.

d) $y''(0) = -4$ concavidade para baixo

e) não está definida para $x = \pm 1$

ALTERNATIVA C

18) (EN-98) Seja $x = \text{arc cos } 3/5$, $x \in [0, \pi]$. Então sen 2x é igual a

a) $\frac{24}{25}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{16}{25}$ d) $\frac{6}{5}$ e) $\frac{2}{5}$

solução:

cos x = 3/5

sen x = 4/5

$\text{sen } 2x = 2.\frac{3}{5}.\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

ALTERNATIVA A

19) (EN-98) A equação do plano que contém as retas de equação $\frac{x-4}{3} = y-3 = \frac{z-5}{4}$ e $\frac{x-6}{5} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-3}{2}$ é igual a

a) $4x + 3y + 5z = 13$
b) $6x + 4y + 3z = 12$
c) $6x - 14y - z = 0$
d) $6x - 14y - z = -23$
e) $4x + 3y + 5z = 12$

solução:

r: $\frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-5}{4}$

$\vec{u} = (3;1;4)$ $\vec{u} // r$

s: $\frac{x-6}{5} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-3}{2}$

$\vec{v} = (5;2;2)$ $\vec{v} // s$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \vec{k} - 6\vec{i} + 14\vec{j} = cte$$

tipo de plano $Z - 6x + 14y = cte$

Jogando o ponto (4; 3; 5), achamos

$6x - 14y - z = -23$

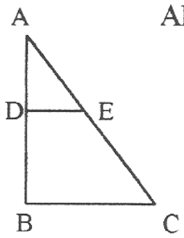
ALTERNATIVA D

20) (EN-98) Considere um cone circular reto de raio da base 5 cm e altura 12 cm. As dimensões do raio e da altura do cilindro circular reto, de maior volume, que pode ser inscrito neste cone, são respectivamente

a) $\frac{10}{3}$ e 4 b) 4 e 10 c) 3 e $\frac{14}{3}$

d) $\frac{9}{5}$ e $\frac{23}{4}$ e) $\frac{5}{2}$ e 5

solução:



AD = h , DE = r , BC = 5 e AB = 12

$\Delta ADE \sim \Delta ABC$

$\frac{5}{r} = \frac{12}{h}$

$h = \frac{12r}{5}$

$V = \pi r^2 (12 - h)$

$V = \pi r^3 \left(12 - \frac{12r}{5}\right)$

$V = \frac{12\pi r^2}{5}(5-r)$

Achando o máximo:

$V' = 10r - 3r^2 = 0 \Rightarrow r = 10/3$ cm

$h = 12 - \frac{12r}{5} = 12 - \frac{12}{5}.\frac{10}{3} = 4$ cm

ALTERNATIVA A

21) (EN-98) Nas proposições abaixo A, B e C são matrizes quadradas de ordem **n** e A^t é a matriz transposta de A. Coloque V na coluna à direita quando a proposição for verdadeira e F quando for falsa.

1) Se AB = AC então B = C ( )

2) $(AB)^t = A^t B^t$ quaisquer que sejam A e B ( )

3) $(A + B)^t = A^t + B^t$ quaisquer que sejam A e B ( )

Lendo a coluna da direita de cima para baixo encontramos:

a) V F V b) F F F c) F F V d) V V F e) F V F

solução:

1) Se, por exemplo, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, a afirmação não é válida para quaisquer B e C.

2) $(AB)^t = B^t A^t$

3) correta

ALTERNATIVA C

22) (EN-98) Seja $y = x^3 - 3x + 5$, onde $x = g(t)$, $g'(2) = 3$ e $g(2) = 4$. A derivada de **y** no ponto $t = 2$ é

a) 9 b) 27 c) 45 d) 90 e) 135

solução:

$$y' = 3x^2\frac{dx}{dt} - 3\frac{dx}{dt}$$

$y' = 3[g(t)]^2\, g'(t) - 3g'(t)$

$y'_{t=2} = 3[g(2)]^2\, g'(2) - 3g'(2)$

$y'_{t=2} = 3.4^2.3 - 3.3 = 135$

ALTERNATIVA E

23) (EN-98) Considere a proposição: "Se $x > 5$ então $y = 6$". A proposição equivalente é

a) "Se $x < 5$ então $y \neq 6$"

b) "Se $y \neq 6$ então $x < 5$"

c) "Se $y > 5$ então $x = 5$"

d) "Se $y \neq 6$ então $x \leq 5$"

e) "Se $x \leq 5$ então $y \neq 6$"

ALTERNATIVA D

24) (EN-98) O valor de "a" para que a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} & \text{se } x \neq 3 \\ a & \text{se } x = 3 \end{cases} \quad \text{seja contínua em } x = 3$$

é

a) $\sqrt{3}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\dfrac{1}{3}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ e) $\dfrac{1}{6}$

solução:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \to 3}\frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} = \lim_{x \to 3}\frac{(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \lim_{x \to 3}\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

ALTERNATIVA D

25) (EN-98) A componente do vetor $\vec{u} = (5, 6, 5)$ na direção do vetor $\vec{v} = (2, 2, 1)$ é o vetor

a) $\left(\dfrac{5}{\sqrt{86}}, \dfrac{5}{\sqrt{86}}, \dfrac{5}{2\sqrt{86}}\right)$ b) (6, 6, 3)

c) (10, 10, 5) d) $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ e) $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{4}\right)$

solução:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{5^2 + 6^2 + 5^2} = \sqrt{86}$$

Da mesma forma:

$$|\vec{v}| = 3$$

$$27 = 3\sqrt{86}\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{9}{\sqrt{86}}$$

$$\vec{u}\rho = (2x, 2x, x)$$

$$|\vec{u}\rho| = \sqrt{(2x)^2 + (2x)^2 + x^2} = 3x$$

$$|\vec{u}|\cos\theta = 3x$$

$$\sqrt{86}.\frac{9}{\sqrt{86}} = 3x$$

$$x = 3$$

$$\vec{u}\rho = (2.3, 2.3, 3) = (6, 6, 3)$$

ALTERNATIVA B