MINISTÉRIO DA MARINHA
DIRETORIA DE ENSINO DA MARINHA

1991/1992

CONCURSO DE ADMISSÃO À ESCOLA NAVAL - 1991

PROVA 1 - MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES GERAIS

1 - Esta Prova é composta de um questionário contendo 25 questões, valendo 100 (cem) pontos.

2 - A duração total da Prova será de três horas, incluindo o tempo destinado ao preenchimento da Folha-Resposta.

3 - Tenha cuidado ao marcar a Folha-Resposta. Cubra toda a quadrícula usando lápis preto nº 2. Caso precise, apague completamente a quadrícula.

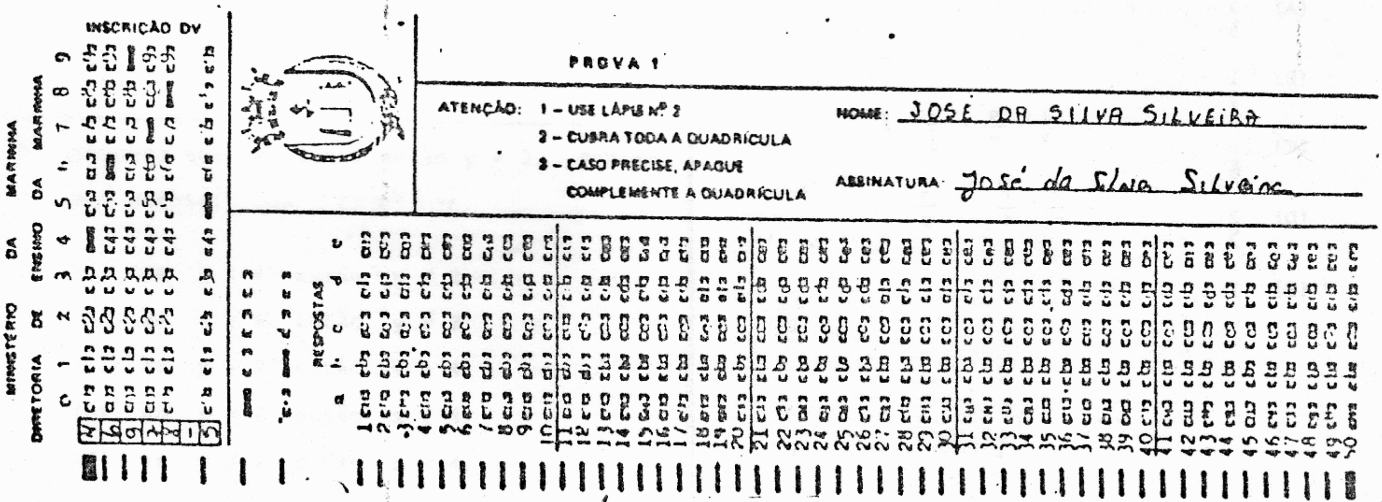
4 - Marque somente uma alternativa para cada pergunta.

5 - Ao receber a sua Folha-Resposta, verifique se a cor e o número da Prova constantes da mesma correspondem aos desta Capa de Prova.

6 - Só comece a responder a Prova ao ser dada a ordem para iniciá-la, interrompendo a sua execução no momento em que for determinado.

7 - Iniciada a Prova, só será permitido dirigir-se ao Fiscal, em caso de problema de saúde ou ocorrência grave, que impossibilite a sua realização.

8 - O candidato deverá cumprir rigorosamente as determinações constantes das "Instruções Gerais aos Candidatos", que serão lidas, obrigatoriamente, pelo Supervisor/Fiscal antes do início da Prova.



1991/1992

1. O valor de a para o qual duas das raízes da equação $x^3 + ax^2 - 2x + 6 = 0$ são simétricas é

$x_1 = -x_2 \rightarrow x_1 + x_2 = 0$

$\underbrace{x_1 + x_2}_{0} + x_3 = -a \rightarrow x_3 = -a$

$P(-a) = -a^3 + a^3 + 2a + 6 = 0$

$a = -3$

(A) -3

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 3

2. Um losango tem diagonais a e b. A circunferência inscrita no losango

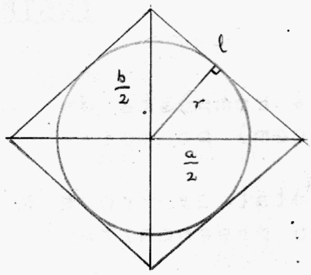
(A) só existe se a = b

(B) sempre existe e tem raio $\sqrt{ab}$

(C) sempre existe e tem raio $\sqrt{a^2 + b^2}$

(D) sempre existe e tem raio $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

~~(E)~~ sempre existe e tem raio $\frac{ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$



$l = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ $r = \frac{a}{2} \frac{b}{2}$

$r = \frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$

3. Um dos focos da elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ é o ponto

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

$c^2 = 9 - 4$

$c = \sqrt{5}$

$F = (0, \sqrt{5})$

$F' : (0, -\sqrt{5})$

(A) $(0, \sqrt{2})$

(B) $(\sqrt{13}, 0)$

(C) $(0, \sqrt{13})$

(D) $(\sqrt{5}, 0)$

~~(E)~~ $(0, \sqrt{5})$

4. O limite da soma $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \ldots$ é igual a

$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} + \frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{1}{9}} =$

$= \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{9}^3}{8} + \frac{2}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{9}}{\cancel{8}_4}$

$= \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

(A) $\frac{3}{8}$

(B) $\frac{1}{2}$

~~(C)~~ $\frac{5}{8}$

(D) $\frac{2}{3}$

(E) 1

5. O cosseno do ângulo P do triângulo de vértices P (1, 2), Q (4, 6), R (4, −2) vale

$PQ^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \quad PQ = 5 = c$

$PR^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \quad PR = 5 = b$

$QR^2 = 0^2 + 8^2 = 64 \quad QR = 8 = a$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\theta$

$\cos\theta = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\cos\theta = \dfrac{25 + 25 - 64}{2.5.5} = -\dfrac{14}{50} = -\dfrac{7}{15}$

~~(A)~~ $-\dfrac{7}{25}$

(B) $-\dfrac{3}{25}$

(C) $\dfrac{1}{4}$

(D) $\dfrac{3}{25}$

(E) $\dfrac{7}{25}$

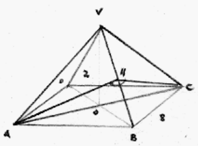
---

6. Em uma pirâmide quadrangular regular a altura é 2 e a aresta da base é 8. O cosseno do ângulo diedro entre duas faces laterais adjacentes vale

$\Delta VOA: \ l^2 = (4\sqrt{2})^2 + 2^2 = 36 \ \therefore \ l = 6$

$S_{VAB} = \frac{1}{2} 6 h = \sqrt{10 \times 2 \times 4 \times 4}$

$\rightarrow h = \dfrac{8\sqrt{5}}{3}$



$\Delta AHC =$

$(8\sqrt{2})^2 = \left(\dfrac{8\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{8\sqrt{5}}{3}\right)^2 - 2\,\dfrac{8\sqrt{5}}{3}\cdot\dfrac{8\sqrt{5}}{3}\cos\theta$

$\dfrac{10}{9}\cos\theta = \dfrac{5}{9} + \dfrac{5}{9} - 2 = -\dfrac{4}{5}$

(A) $-\dfrac{1}{4}$

(B) $-\dfrac{1}{3}$

(C) $-\dfrac{1}{2}$

(D) $-\dfrac{3}{4}$

~~(E)~~ $-\dfrac{4}{5}$

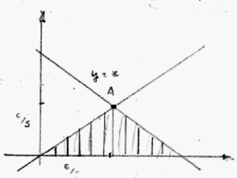
---

7. A área da região formada pelos pontos P (x, y) tais que $x \geqslant y \geqslant 0$ e $2x + 3y \leqslant 6$ vale

$\begin{cases} x \geqslant y \geqslant 0 \begin{cases} x \geqslant y \\ y \geqslant 0 \end{cases} \\ 2x + 3y - 6 \leqslant 0 \end{cases} \quad A \begin{cases} x = y \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$

$y_A = 6/5 = h$

$\rightarrow S_{OAB} = \dfrac{1}{2}\,3\,\dfrac{6}{5} = \dfrac{18}{10} = 1{,}8$



(A) 1,5

~~(B)~~ 1,8

(C) 2

(D) 2,5

(E) 3

---

8. Sabe-se que se $x > 4$ então $y = 2$. Podemos daí concluir que

$p \rightarrow q \sim \bar{q} \rightarrow \bar{p}$

(A) se $x < 4$ então $y \neq 2$

(B) se $x \leqslant 4$ então $y \neq 2$

(C) se $y = 2$ então $x > 4$

~~(D)~~ se $y \neq 2$ então $x \leqslant 4$

(E) se $y \neq 2$ então $x < 4$

9. Sabendo que $\ln 2 \cong 0{,}693$ e que $\ln 3 \cong 1{,}099$, a solução da equação $3^{2x+1} - 2 \cdot 3^x - 8 = 0$ é

$3^{2x}3^1 - 2.3^x - 8 = 0$ $\quad 3^x = y$

$3y - 2y - 8 = 0$

$\Delta = 4 + 4.3.8 = 100$

$y = \frac{2 \pm 10}{6} = 2, \ -\frac{4}{3}$

$3^x = 2 \quad x = \frac{0{,}693}{1{,}099} = 0{,}63$

$\log 3^x = \log 2$

(A) 0,44

(B) 0,51

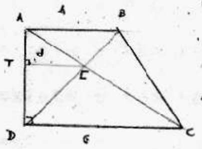
(C) 0,63

(D) 0,72

(E) 0,98

---

10. Um trapézio retângulo tem bases 4 e 6. A distância do ponto de interseção das diagonais ao lado que é perpendicular às bases vale



$\Delta ATI \sim \Delta ADC$: $\frac{d}{6} = \frac{x}{h}$ (1)

$\Delta DTI \sim \Delta DBA$: $\frac{d}{4} = \frac{h-x}{h}$ (2)

$(1)+(2)$: $\frac{d}{6} + \frac{d}{4} = 1$

$4d + 6d = 24 \rightarrow d = 2{,}4$

(A) 2

(B) 2,2

(C) 2,4

(D) 2,5

(E) $2\sqrt{2}$

---

11. Se $|\vec{u}| = 3$ e $|\vec{v}| = 4$, o valor máximo de $|\vec{u} + \vec{v}|$ é

$|\vec{u} - \vec{v}| \le |\vec{u} + \vec{v}| \le |\vec{u}| + |\vec{v}|$

$1 \le |\vec{u} + \vec{v}| \le 7$

(A) 1

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 7

---

12. O resto da divisão de $1 + x + x^2 + \ldots + x^{100}$ por $x^2 - 1$ é

$1 + x + x^2 + \ldots + x^{100} = Q(x)(x^2-1) + ax + b$

$\begin{cases} x = 1 \rightarrow 101 = a + b \\ x = -1 \rightarrow 1 = -a + b \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} b = 51 \\ a = 50 \end{matrix}$

$R(x) = 50x + 51$

(A) 0

(B) $x + 1$

(C) $50x + 50$

(D) $50x + 51$

(E) $51x + 50$

---

13. Investindo uma quantia a juros de 8% ao mês e reaplicando os juros, os saldos mensais formarão uma progressão

m

$1{,}08\, m$

$(1{,}08)^2 m$

PG: $q = 1{,}08$

(A) aritmética de razão igual a 8% do investimento inicial

(B) geométrica de razão 0,08

(C) geométrica de razão 1,08

(D) geométrica de razão 1,8

(E) aritmética de razão 8

14. Um copo, com a forma de um cilindro circular reto de raio de base 2 e altura 4, está apoiado em uma mesa horizontal e contém água até a altura 3. Inclina-se o copo até que a água comece a derramar. Nesse instante, o ângulo α que o plano da base do copo faz com o plano da mesa é tal que $tg\alpha$ vale

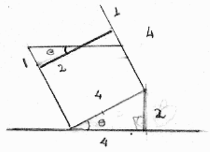
(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{2}{3}$

(E) $\frac{3}{4}$



$tg\theta = \frac{1}{2}$

15. Se $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ então $f'(2)$ vale

$f'(x) = \dfrac{1.(x^2+1) - 2x\,x}{(x^2+1)^2}$

$f'(2) = \dfrac{4+1-8}{25} = -\dfrac{3}{25} = -0,12$

(A) - 0,4

(B) - 0,12

(C) 0

(D) 0,12

(E) 0,4

16. A partir de um conjunto de 19 atletas, formam 57 times de 4 atletas cada. Todos os atletas participam de um mesmo número de times e cada par de atletas fica junto no mesmo time um mesmo número x de vezes. O valor de x é

n : nº de times que tem um determinado atleta

$19n = 57 \times 4 \rightarrow n = 12$

t_1 x _ _ _

t_2 x _ _ _

t_3 x _ _ _

t_4 x _ _ _

$3 \times 12 = 18x$

$x = 2$

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

17. Dois círculos de raio 3 possuem exatamente 3 tangentes comuns. A distância entre seus centros é

Círculos tg exteriormente

$d(O_1 O_2) = R_1 + R_2 = 6$

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 6

18. No intervalo $[0, 2\pi]$, o número de soluções da equação $\operatorname{sen} x = \cos 2x$ é

$\operatorname{sen} x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

$2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 4.2.1 = 9$

$\operatorname{sen} x = \frac{1 \pm 3}{4} \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$ $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

$x = k\pi + (-1)^k$

$[0, 2\pi] = \left\{ \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(E) 4

---

19. O valor de $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 + x^2 - 2}{x^5 + 2x^2 - 3}$ é

$\frac{4x^3 + 2x}{5x^4 + 4x} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{4}{5}$

(C) 1

(D) $\frac{3}{2}$

(E) 2

---

20. O sistema de equações

$$\begin{cases} x - y + kz = 1 \\ kx + z = 0 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ k & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1 + k^2 - (1 - k)$ $k = 1 - k = -2 \to$ (SPI)

$= k^2 + k = 2$ $k \neq 1$ e $k \neq 2$ (SPD)

(A) é sempre possível

(B) é impossível para $k = 1$

(C) é impossível para $k = -2$

(D) é determinado para $k \neq 1$

(E) é determinado para $k \neq 2$

---

21. Aumentando o raio de uma esfera de 20%, o volume aumentará, aproximadamente, de

$V_i = \frac{4}{3}\pi R^3$

$V_f = \frac{4}{3}\pi R^3 (1,2)^3$

$= (1,2)^3 \frac{4}{3}\pi R^3$

$V_f = (1,2)^3 \cdot V_i$ $\frac{\Delta V}{V_i} = 0,728 = 72,87\%$

$= 1,728\, V_i$

(A) 80%

(B) 73%

(C) 64%

(D) 60%

(E) 20%

---

22. O coeficiente de x^2 no desenvolvimento de $\left(x - \frac{1}{x}\right)^6$ é

$T_{p+1} = C_6^p \left(-\frac{1}{x}\right)^p x^{6-p}$

$= (-1)^p C_6^p x^{6-2p}$

$6 - 2p = 2 \to p = 2$

$T_3 = (-1)^2 C_6^2 x^2$

$= 15x^2$

(A) 2

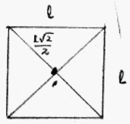
(B) 6

(C) 12

(D) 15

(E) 30

23. O menor valor que pode ter a soma dos quadrados das distâncias de um pontos aos quatro vértices de um quadrado de lado ℓ é



(A) $2\ \ell^2$

(B) $3\ \ell^2$

(C) $4\ \ell^2$

(D) $5\ \ell^2$

(E) $6\ \ell^2$

$\ell = 4\left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2 \qquad \ell = 2\ell^2$

---

24. A EN, a AMAN e a AFA disputaram 10 provas de atletismo. Em cada prova se outorga uma medalha de ouro (que vale 3 pontos), uma de prata (2 pontos) e uma de bronze (1 ponto). A AMAN ganhou mais medalhas de ouro que cada uma de suas adversárias e ganhou também, no total, uma medalha a mais que a AFA e duas medalhas a mais que a EN. Apesar disso, a EN venceu a competição com 1 ponto de vantagem sobre a AFA e 2 pontos de vantagem sobre a AMAN. Quantas medalhas de prata a EN conquistou?

(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 6

(E) 7

$m_{AM} = m_{AF} + 1$ $\qquad t_{EN} = t_{AF} + 1$

$m_{AM} = m_{EN} + 2$ $\qquad t_{EN} = t_{AM} + 2$

$m_{AM} + m_{AF} + m_{EN} = 30$ $\qquad t_{AM} + t_{AF} + t_{EN} = 60$

$3m_{AM} - 3 = 30$ $\qquad 3t_{EN} - 3 = 60$

$m_{AM} = 11$ $\qquad t_{EN} = 21$

$m_{AF} = 10$ $\qquad t_{AM} = 19$

$m_{EN} = 9$ $\qquad t_{AF} = 20$

$O_{AM} + O_{AF} + O_{EN} = 10$ $\qquad \rightarrow O_{AF} + O_{EN} = 6$

$\rightarrow O_{AM} \geq 4$ $\qquad O_{AF} = O_{EN} =$

$O_{AM} + P_{AM} + B_{AM} = 11$ $\qquad P_{EN} + B_{EN} = 6$

$3O_{AM} + 2P_{AM} + B_{AM} = 19$ $\qquad 2P_{EN} + B_{EN} = 12$ $\qquad \rightarrow P_{EN} = 6$

$\rightarrow O_{AM} \leq 4$

$O_{AM} = 4 \rightarrow \begin{cases} O_{AF} \leq 3 \\ O_{EN} \leq 3 \end{cases}$

---

25. O lugar geométrico das imagens dos complexos z tais que $|z| = 2|z - 1|$ é uma

(A) reta

(B) circunferência de raio $\frac{2}{3}$

(C) circunferência de raio $\frac{4}{3}$

(D) elipse

(E) parábola

$|x+yi|^2 = 2^2|x-1+yi|^2$

$x^2+y^2 = 4(x^2-2x+1+y^2)$

$x^2+y^2 = 4x^2-8x+4+4y^2$

$3x^2 - 8x + 4 + 3y^2 = 0$

$x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{4}{3} + y^2 = 0.$

$x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} + y^2 = -\frac{4}{3} + \frac{16}{9}$

$(x - 4/3)^2 + y^2 = \frac{4}{9}$ $\qquad C = (4/3, 0)$

$R = 2/3$