MINISTÉRIO DA MARINHA
DIRETORIA DE ENSINO DA MARINHA

1991/1992

CONCURSO DE ADMISSÃO À ESCOLA NAVAL - 1991

PROVA 1 - MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES GERAIS

1 - Esta Prova é composta de um questionário contendo 25 questões, valendo 100 (cem) pontos.

2 - A duração total da Prova será de três horas, incluindo o tempo destinado ao preenchimento da Folha-Resposta.

3 - Tenha cuidado ao marcar a Folha-Resposta. Cubra toda a quadrícula usando lápis preto nº 2. Caso precise, apague completamente a quadrícula.

4 - Marque somente uma alternativa para cada pergunta.

5 - Ao receber a sua Folha-Resposta, verifique se a cor e o número da Prova constantes da mesma correspondem aos desta Capa de Prova.

6 - Só comece a responder a Prova ao ser dada a ordem para iniciá-la, interrompendo a sua execução no momento em que for determinado.

7 - Iniciada a Prova, só será permitido dirigir-se ao Fiscal, em caso de problema de saúde ou ocorrência grave, que impossibilite a sua realização.

8 - O candidato deverá cumprir rigorosamente as determinações constantes das "Instruções Gerais aos Candidatos", que serão lidas, obrigatoriamente, pelo Supervisor/Fiscal antes do início da Prova.

MINISTÉRIO DA MARINHA
DIRETORIA DE ENSINO DA MARINHA

INSCRIÇÃO DV

PROVA 1

ATENÇÃO: 1 - USE LÁPIS Nº 2
2 - CUBRA TODA A QUADRÍCULA
3 - CASO PRECISE, APAGUE COMPLETAMENTE A QUADRÍCULA

NOME: JOSÉ DA SILVA SILVEIRA

ASSINATURA: José da Silva Silveira

RESPOSTAS

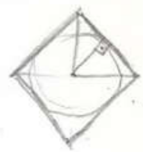
1. O valor de a para o qual duas das raízes da equação $x^3 + ax^2 - 2x + 6 = 0$ são simétricas é

(A) -3
(B) -1
(C) 0
(D) 1
(E) 3

$x_1 + x_2 + x_3 = -a$
$x_1 + x_2 = 0$
$x_3 = -a$ é raiz
$\cancel{-a^3} + \cancel{a^3} - 2(-a) + 6 = 0$
$2a = -6 \quad a = -3$

2. Um losango tem diagonais a e b. A circunferência inscrita no losango

(A) só existe se $a = b$
(B) sempre existe e tem raio $\sqrt{ab}$
(C) sempre existe e tem raio $\sqrt{a^2 + b^2}$
(D) sempre existe e tem raio $\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$
(E) sempre existe e tem raio $\dfrac{ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$

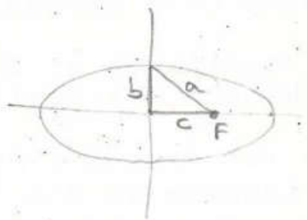


$\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = R \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

$R = \frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$

3. Um dos focos da elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ é o ponto

(A) $(0, \sqrt{2})$
(B) $(\sqrt{13}, 0)$
(C) $(0, \sqrt{13})$
(D) $(\sqrt{5}, 0)$
(E) $(0, \sqrt{5})$



$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

$a^2 = 9$ focos sobre Oy.
$b^2 = 4$
$c^2 = 5 \to (0, \pm\sqrt{5})$

4. O limite da soma $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \dots$ é igual a

(A) $\frac{3}{8}$
(B) $\frac{1}{2}$
(C) $\frac{5}{8}$
(D) $\frac{2}{3}$
(E) 1

$S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \dots$

$\frac{1}{3} S = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \dots$

$\frac{2}{3} S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots$

$\frac{2}{3} S = \frac{1}{3} + \frac{1/9}{1 + 1/3} = \frac{1}{3} + \frac{1/9}{4/3} = \frac{1}{3} + \frac{3}{36}$

$\frac{2}{3} S = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{12}{36} + \frac{3}{36} = \frac{15}{36}$

$S = \frac{45}{72} = \frac{5}{8}$

5. O cosseno do ângulo P do triângulo de vértices P (1, 2), Q (4, 6), R (4, -2) vale

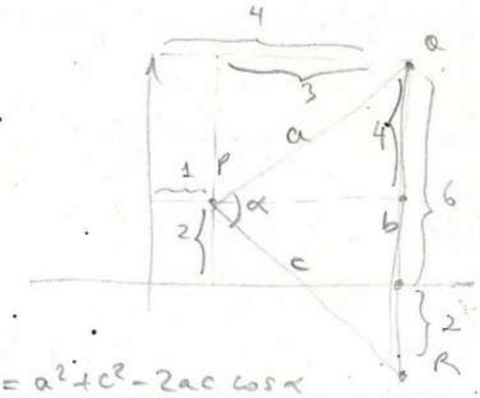
(A) $-\frac{7}{25}$

(B) $-\frac{3}{25}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{3}{25}$

(E) $\frac{7}{25}$



a=5
c=5
b=8

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{25+25-64}{2\cdot5\cdot5} = \frac{-14}{50} = -7/25$

6. Em uma pirâmide quadrangular regular a altura é 2 e a aresta da base é 8. O cosseno do ângulo diedro entre duas faces laterais adjacentes vale

(A) $-\frac{1}{4}$

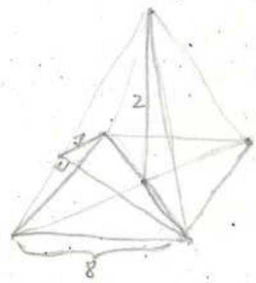
(B) $-\frac{1}{3}$

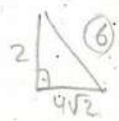
(C) $-\frac{1}{2}$

(D) $-\frac{3}{4}$

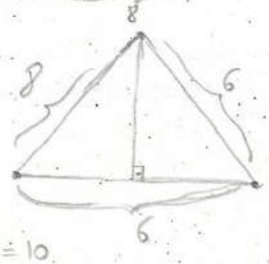
(E) $-\frac{4}{5}$

$\cos\theta = \frac{\frac{2\cdot64\cdot5}{9} - 64\cdot2}{2\cdot\frac{8\sqrt5}{3}\cdot\frac{8\sqrt5}{3}} = \frac{64\cdot2\left(\frac{5}{9}-\frac{9}{9}\right)}{64\cdot2\cdot\frac{5}{9}} = \frac{-4/9}{5/9} = -4/5$





$y+32=36$



$h = \frac{2}{6}\sqrt{10\cdot2\cdot4\cdot4} = \frac{1}{3}\cdot4\cdot2\sqrt5 = \frac{8\sqrt5}{3}$

p=10
p−a=2
p−b=4 p−c=4

7. A área da região formada pelos pontos P (x, y) tais que $x \geqslant y \geqslant 0$ e $2x + 3y \leqslant 6$ vale

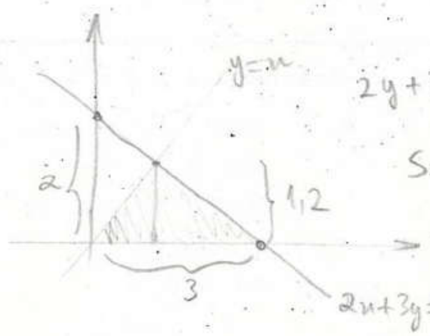
(A) 1,5

(B) 1,8

(C) 2

(D) 2,5

(E) 3



$2y+3y=6 \rightarrow y=1{,}2$

$S = \frac{3\cdot1{,}2}{2} = 1{,}8$

8. Sabe-se que se $x > 4$ então $y = 2$. Podemos daí concluir que

(A) se $x < 4$ então $y \neq 2$

(B) se $x \leqslant 4$ então $y \neq 2$

(C) se $y = 2$ então $x > 4$

(D) se $y \neq 2$ então $x \leqslant 4$

(E) se $y \neq 2$ então $x < 4$

$(p \rightarrow q) \equiv \bar{q} \rightarrow \bar{p}$

9. Sabendo que $\ln 2 \cong 0,693$ e que $\ln 3 \cong 1,099$, a solução da equação $3^{2x+1} - 2 \cdot 3^x - 8 = 0$ é

(A) 0,44
(B) 0,51
(C) 0,63
(D) 0,72
(E) 0,98

$$\begin{array}{r|l} 6930 & 1099 \\ -6594 & 0,63 \\ 3360 & \\ -3297 & \\ 063 & \end{array}$$

$3y^2 - 2y - 8 = 0$

$y = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3)(-8)}}{6} = \dfrac{2 \pm \sqrt{100}}{6} \Rightarrow 2$

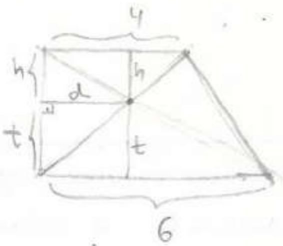
$3^x = 2$

$\log_3 2 = x \Rightarrow x = \dfrac{\log 2}{\log 3} = \dfrac{0,693}{1,099}$

---

10. Um trapézio retângulo tem bases 4 e 6. A distância do ponto de interseção das diagonais ao lado que é perpendicular às bases vale

(A) 2
(B) 2,2
(C) 2,4
(D) 2,5
(E) $2\sqrt{2}$



$\dfrac{h}{4} = \dfrac{t}{6} = \dfrac{h+t}{10}$

$\dfrac{h}{d} = \dfrac{h+t}{6}$

$d = \dfrac{6h}{h+t} = \dfrac{6h \cdot 4}{10h} = 2,4$

---

11. Se $|\vec{u}| = 3$ e $|\vec{v}| = 4$, o valor máximo de $|\vec{u} + \vec{v}|$ é

(A) 1
(B) 3
(C) 4
(D) 5
(E) 7

---

12. O resto da divisão de $1 + x + x^2 + \ldots + x^{100}$ por $x^2 - 1$ é

(A) 0
(B) $x + 1$
(C) $50x + 50$
(D) $50x + 51$
(E) $51x + 50$

P(x) é de grau 100
D(x) é de grau 2
R(x) é de grau 1
$R(x) = ax + b$
por $x+1 \to P(-1)$
$-a + b = 1$
por $x - 1 \to P(1)$
$a + b = 101$
$\to a = 50;\ b = 51$

$x^{100} + x^{99} + x^{98} + x^{97} + \ldots + x^2 + x + 1 \;|\; x^2 - 1$
$-x^{100} + x^{98} \qquad\qquad x^{98} + x^{97} + 2x^{96} + 2x^{95} + \ldots$
$x^{99} + 2x^{98} + x^{97} + \ldots$
$-x^{99} \qquad + x^{97}$
$2x^{98} + 2x^{97} + x^{96} + \ldots$
$-2x^{98} \qquad + 2x^{96}$
$2x^{97} + 3x^{96} + \ldots$

$x^{100} \to x^{99} \Rightarrow x^{98} \to x^{97}$
$x^{98} \to x^{97} \Rightarrow 2x^{96} \to 2x^{95}$
$\vdots$
$x^4 \to x^3 \Rightarrow x^2 \to x^1$
coef $\to$ 49 49

$$\begin{array}{l|l} 50x^2 + 50x + 1 & x^2 - 1 \\ -50x^2 + 50 & 50 \\ 50x + 51 & \end{array}$$

---

13. Investindo uma quantia a juros de 8% ao mês e reaplicando os juros, os saldos mensais formarão uma progressão

(A) aritmética de razão igual a 8% do investimento inicial
(B) geométrica de razão 0,08
(C) geométrica de razão 1,08
(D) geométrica de razão 1,8
(E) aritmética de razão 8

$x + 0,08x = 1,08x$

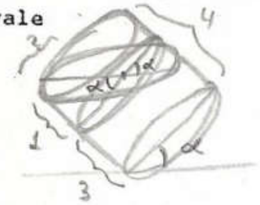
$1,08x + 0,08 \cdot 1,08x = 1,1664x$

$$\begin{array}{r|l} 1,1664 & 1,08 \\ -108 & 1,08 \\ 864 & \\ 0 & \end{array}$$

$\to$ PG de razão 1,08

$$\begin{array}{r} 108 \\ \times\ 8 \\ \hline 864 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,0864 \\ +\ 1,08 \\ \hline 1,1664 \end{array}$$

14. Um copo, com a forma de um cilindro circular reto de raio de base 2 e altura 4, está apoiado em uma mesa horizontal e contém água até a altura 3. Inclina-se o copo até que a água comece a derramar. Nesse instante, o ângulo α que o plano da base do copo faz com o plano da mesa é tal que tgα vale

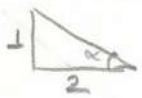


(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{3}$

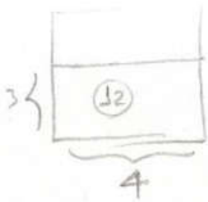
(C) $\frac{1}{2}$

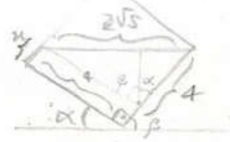
(D) $\frac{2}{3}$



(E) $\frac{3}{4}$

$tg\,\alpha = \frac{1}{2}$





$(x+4)\cdot 2 = 12$

$x+4 = 6$

$x = 2$

$16+4 = 20 = 2\sqrt{5}$

$4 = a \cdot 2\sqrt{5}$

$a = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$tg\,\alpha = \frac{2\sqrt{5}/5}{4\sqrt{5}/5} = \frac{1}{2}$

$2\sqrt{5}\cdot h = 4\cdot 2$

$h = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

15. Se $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ então $f'(2)$ vale

(A) − 0,4

(B) − 0,12

(C) 0

(D) 0,12

(E) 0,4

$f'(x) = (x^2+1)^{-1} - x(x^2+1)^{-2}\cdot 2x$

$f(x) = x(x^2+1)^{-1}$

$f'(2) = (5)^{-1} - 2(5)^{-2}\cdot 2\cdot 2 = \frac{1}{5} - \frac{8}{25} = \frac{-3}{25} =$

$= -0{,}12$

16. A partir de um conjunto de 19 atletas, formam 57 times de 4 atletas cada. Todos os atletas participam de um mesmo número de times e cada par de atletas fica junto no mesmo time um mesmo número x de vezes. O valor de x é

57×4 vagas

m: nº de times em que um atleta participa

$19m = 57\cdot 4 \to m = 12$

(A) 1

(B) 2

(C) 3 $18x = 3\cdot 12 = 36$ $x=2$

(D) 4

(E) 5

Cada time tem 6 duplas: $C_4^2 = \frac{4\cdot 3}{2}$

O nº total de duplas possíveis é: $C_{19}^2 = \frac{19\cdot 18}{2} = 171$

São 57 times × 6 duplas = 342 duplas (total)

$\frac{342}{171} = 2$

t_1: A ___

t_2: A ___ ← vagas preenchidas pelos atletas pares de A.

⋮

t_{12}: A ___

17. Dois círculos de raio 3 possuem exatamente 3 tangentes comuns. A distância entre seus centros é

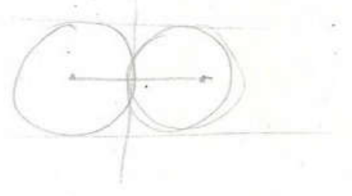
(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 6



18. No intervalo $[0,\ 2\pi]$, o número de soluções da equação $\operatorname{sen} x = \cos 2x$ é

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(E) 4

$\operatorname{sen} x = -2\operatorname{sen}^2 x + 1$

$2y^2 + y - 1 = 0 \qquad y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4(-2)}}{4} =$

$= \dfrac{-1 \pm 3}{4} \begin{matrix} \nearrow \frac{1}{2} \\ \searrow -1 \end{matrix}$

$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \to x = \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}$

$\operatorname{sen} x = -1 \to x = \frac{3\pi}{2}$

19. O valor de $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 + x^2 - 2}{x^5 + 2x^2 - 3}$ é

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{4}{5}$

(C) 1

(D) $\frac{3}{2}$

(E) 2

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ \hline +1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \end{array}$$

$\dfrac{(x-1)(x^3+x^2+2x+2)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+3x+3)} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

Ou $\dfrac{4x^3+2x}{5x^4+4x} : \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

20. O sistema de equações

$$\begin{cases} x - y + kz = 1 \\ kx + z = 0 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

(A) é sempre possível

(B) é impossível para $k = 1$

(C) é impossível para $k = -2$

(D) é determinado para $k \neq 1$

(E) é determinado para $k \neq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - 1 + k - 1 = 0$

$k^2 + k - 2 = 0 \quad \begin{cases} k = -2 \\ \text{ou} \\ k = 1 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} -1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0 \to$ é sempre possível

Indeterminado para $k=1$ e $k=-2$.

21. Aumentando o raio de uma esfera de 20%, o volume aumentará, aproximadamente, de

(A) 80%

(B) 73%

(C) 64%

(D) 60%

(E) 20%

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

$V' = \frac{4}{3}\pi \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot R^3 = 1{,}2^3 \cdot V$

$V' - V = (1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 - 1)V = 0{,}728V$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times\ 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1728 \end{array}$$

22. O coeficiente de x^2 no desenvolvimento de $\left(x - \frac{1}{x}\right)^6$ é

(A) 2

(B) 6

(C) 12

(D) 15

(E) 30

$T_{p+1} = \binom{6}{p}(x)^{6-p}(-x^{-1})^p$

$6 - p - p = 2 \to p = 2$

$\to \binom{6}{2} = \dfrac{6 \cdot 5}{2} = 15$

23. O menor valor que pode ter a soma dos quadrados das distâncias de um pontos aos quatro vértices de um quadrado de lado ℓ é

$\frac{\ell\sqrt{2}}{2} = \frac{\ell}{\sqrt{2}} \to \frac{\ell^2}{2}$

$\frac{\ell^2}{2} \cdot 4 = 2\ell^2$

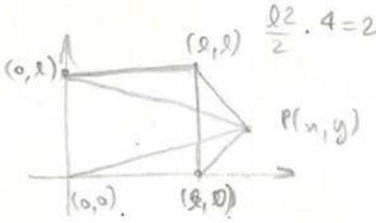
(A) $2\ \ell^2$

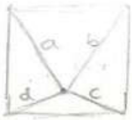
(B) $3\ \ell^2$

(C) $4\ \ell^2$

(D) $5\ \ell^2$

(E) $6\ \ell^2$





$a^2+b^2+c^2+d^2=S$

$S = x^2+y^2+(x-\ell)^2+y^2+(x-\ell)^2+(y-\ell)^2+x^2+(y-\ell)^2 = 4x^2-4\ell x+4y^2-4\ell y+4\ell^2 =$

$= 4(x^2-\ell x+\frac{\ell^2}{4})+4(y^2-\ell y+\frac{\ell^2}{4})+4\ell^2-\ell^2-\ell^2 =$

$= 4(x-\ell/2)^2+4(y-\ell/2)^2+2\ell^2$

$\to S \geq 2\ell^2$

24. A EN, a AMAN e a AFA disputaram 10 provas de atletismo. Em cada prova se outorga uma medalha de ouro (que vale 3 pontos), uma de prata (2 pontos) e uma de bronze (1 ponto). A AMAN ganhou mais medalhas de ouro que cada uma de suas adversárias e ganhou também, no total, uma medalha a mais que a AFA e duas medalhas a mais que a EN. Apesar disso, a EN venceu a competição com 1 ponto de vantagem sobre a AFA e 2 pontos de vantagem sobre a AMAN. Quantas medalhas de prata a EN conquistou?

(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 6

(E) 7

Todos os números devem ser naturais

	O	P	B	(T)	(pontos)
AMAN →	x	a	b	$k+2 \to 11$	$t \to 19$
EN →	y	$\boxed{c}$	d	$k \to 9$	$t+2 \to 21$
AFA →	z	e	f	$k+1 \to 10$	$t+1 \to 20$

$3k+3=30$ $\quad t+t+2+t+1 = 30+20+10 = 60$

$k=9$ $\quad 3t = 57 \to t = 19$

$4 \leq x \leq 6 \to$ se $x=4 \to 12$ pts $\to 2a+b=7$ e $a+b=7$

$\to b=7 \to a=0 \to y=z=3 \to c+d=6$ $\quad 2c+d=12$

$\boxed{c=6} \to d=0 \to e+f=7 \to 2e+f=11 \to e=4 \to f=3$

se $x=5 \to 15$ pts $\to 2a+b=4$ e $a+b=6$

$\to a<0 \to$ ABSURDO.

se $x=6 \to 18$ pts $\to 2a+b=1$ e $a+b=5$

$\to a<0 \to$ ABSURDO

25. O lugar geométrico das imagens dos complexos z tais que $|z| = 2|z-1|$ é uma

(A) reta

(B) circunferência de raio $\frac{2}{3}$

(C) circunferência de raio $\frac{4}{3}$

(D) elipse

(E) parábola

$z = a+bi \to |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$z-1 = a-1+bi \to |z-1| = \sqrt{(a-1)^2+b^2}$

$\sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{(a-1)^2+b^2}$

$a^2+b^2 = 4(a-1)^2+4b^2$

$a^2+b^2 = 4a^2-8a+4+4b^2$

$0 = 3a^2-8a+4+3b^2 \quad (\div 3)$

$0 = a^2-\frac{8}{3}a+\frac{4}{3}+b^2$

$(a-\frac{4}{3})^2+b^2 = \frac{16}{9}-\frac{12}{9} = \frac{4}{9}$

circunferência de raio $\frac{2}{3}$