MINISTÉRIO DA MARINHA
ESCOLA NAVAL
SUPERINTENDÊNCIA DE ENSINO

CONCURSO DE ADMISSÃO - 1990/1991

PROVA DE MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES

1 - Este Caderno de Prova é composto de 25 questões, todas de igual valor.

2 - Além deste Caderno de Prova, cada candidato receberá um CARTÃO DE RESPOSTAS com tarja vermelha, para ser processado em computador.

3 - É proibido ter em seu poder livros, cadernos, papéis, bolsas, calculadoras eletrônicas, relógio com calculadora e régua de cálculo, durante a realização da prova.

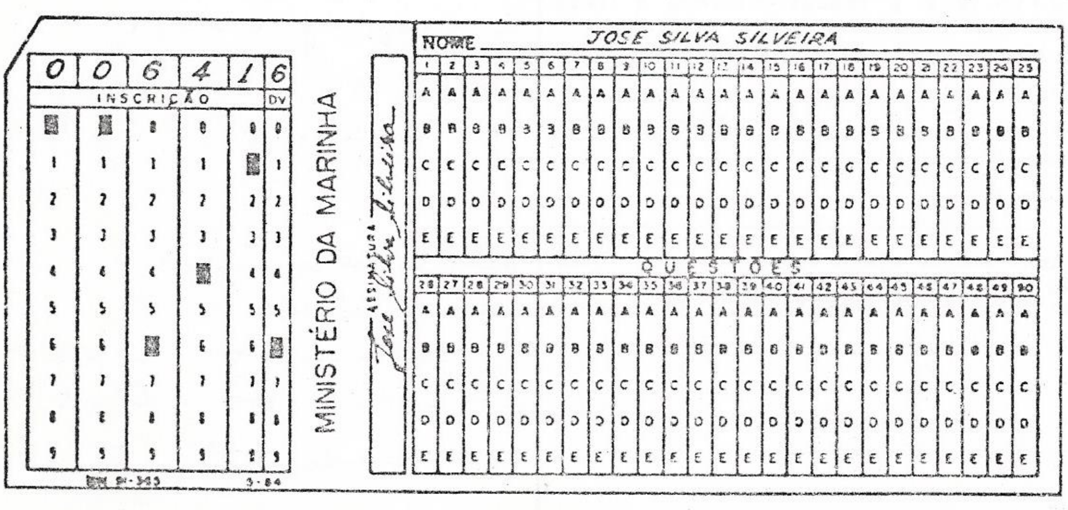
4 - Só comece a responder às questões ao ser dada ordem para iniciar a prova.

5 - O tempo disponível para a resolução das questões e perfuração do CARTÃO DE RESPOSTAS é de 3 horas. Após decorridos 30 minutos do início da prova, o candidato que terminar poderá retirar-se.

6 - O candidato deverá ter o máximo cuidado para não cometer erros na perfuração do CARTÃO DE RESPOSTAS. Mais de uma resposta perfurada num mesmo item o tornará invalidado.

7 - Recomenda-se ao candidato que NÃO DOBRE ou DANIFIQUE O CARTÃO DE RESPOSTAS para que não seja rejeitado por ocasião da correção no computador.

8 - Escreva seu nome (legível), assine, coloque o número de inscrição e perfure-o no CARTÃO DE RESPOSTAS, conforme o modelo abaixo.



1. Se $\text{sen}\,x + \cos x = \frac{1}{2}$ então sen 2x é igual a:

(A) $\frac{-1-\sqrt{7}}{4}$

(B) $\frac{1-\sqrt{7}}{2}$

(C) $\frac{-1+\sqrt{7}}{2}$

(D) $\frac{1+\sqrt{7}}{4}$

(E) $\frac{-3}{4}$

Elevando ao quadrado.

$1 + \text{sen}\,2x = \frac{1}{4}$

$\text{sen}\,2x = -\frac{3}{4}$

2. A equação $\sec^3 x - 2\,tg^2 x = 2$, no intervalo $[0, 2\pi]$:

(A) não possui solução.
(B) possui uma solução.
(C) possui duas soluções.
(D) possui três soluções.
(E) possui quatro soluções.

$\sec^2 = 1 + tg^2$

$tg^2 = \sec^2 - 1$

$\sec^3 x - 2\sec^2 + 2 = 2$

$\sec^2 x \neq 0$

$\sec x - 2 = 0 \to \sec x = 2 \to \cos x = \frac{1}{2} \to \frac{\pi}{3}, \frac{10\pi}{6}$

$\frac{5\pi}{3}$

3. Os triângulos ABC e ABD são equiláteros e estão situados em planos perpendiculares. O cos $\widehat{CAD}$ é igual a:

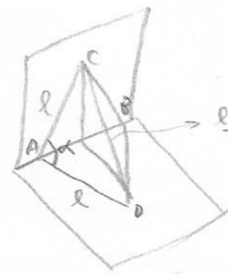
(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{6}$

(D) $\frac{1}{8}$

(E) $\frac{1}{\sqrt{6}}$



$\to \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\ell\sqrt{6}}{2}$

$\frac{6\ell^2}{4} = 2\ell^2 - 2\ell^2\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{\frac{8\ell^2}{4} - \frac{6\ell^2}{4}}{2\ell^2} = \frac{\frac{2\ell^2}{4}}{2\ell^2} =$

4. Escrevem-se os inteiros positivos em ordem crescente 12345678910111213... . O 1991º algarismo escrito é:

(A) 0
(B) 1
(C) 3
(D) 4
(E) 5

1 a 9 → 9 algar.

10 a 99 → 90 · 2 = 180 algs.

100 a x → (x − 99) · 3 = 1800

x − 99 = 600 → x = 699

$\begin{array}{r} 1991 \\ -\ 189 \\ \hline 1802 \end{array}$

$\to 6997\boxed{0}0$

5. O valor de m para o qual 1 é raiz dupla do polinômio $P(x) = x^{10} - mx^5 + m - 1$ é:

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

$P'(x) = 10x^9 - 5mx^4$

$P'(1) = 10 - 5m = 0 \to m = 2$

6. O lugar geométrico das imagens do complexo z^2 quando o complexo $z = x + yi$ (x e y reais) descreve a reta $x = 2$ é:

(A) a reta $x = 4$.
(B) um círculo.
(C) uma elipse.
(D) uma hipérbole.
(E) uma parábola.

$z^2 = x^2 + 2xyi - y^2$

$\to 4 + 4yi - y^2 = x' + y'i$

$x' = 4 - y^2$

$y' = 4y \to y = \frac{y'}{4}$

$\to x' = 4 - \frac{y'^2}{16} \to y'^2 = -16(x' - 4)$

7. Lançam-se simultaneamente cinco dados honestos. Qual a probabilidade de serem obtidos nesta jogada, uma trinca e um par (isto é, um resultado do tipo AAABB com $B \neq A$)?

(A) $\frac{5}{1296}$

(B) $\frac{5}{3888}$

(C) $\frac{25}{648}$

(D) $\frac{125}{324}$

(E) $\frac{125}{648}$

· número total de casos: 6^5

· casos favoráveis:

– escolha da trinca: $C_6^1 = 6$

– escolha do par: $C_5^1 = 5$

– ordenando: $P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

$\to P = \frac{10 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{6} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{25}{648}$

8. Representemos por min(a,b) o menor dos números a e b, isto é,

$$\min(a,b) = \begin{cases} a, & \text{se } a \leq b \\ b, & \text{se } a > b \end{cases}$$

A solução da inequação $\min(2x + 3,\ 3x - 5) < 4$ é:

(A) $x < \frac{1}{2}$

(B) $x < 3$

(C) $\frac{1}{2} < x < 3$

(D) $x > \frac{1}{2}$

(E) $x > 3$

$2x+3 < 3x-5 \Rightarrow x > 8 \rightarrow 2x+3 > 19 \rightarrow$ não

$3x-5 < 2x+3 \rightarrow x < 8 \rightarrow 3x-5 < 19 \rightarrow$ sim

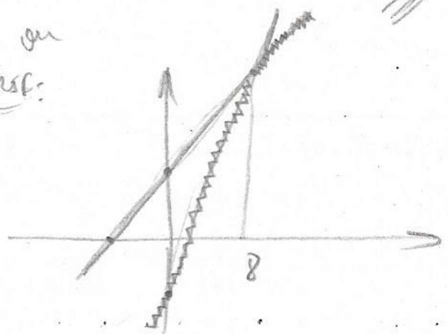
$3x-5 < 4 \rightarrow 3x < 9 \rightarrow x < 3$

ou

Se $x=8$

$\min(19,19) = 19 \rightarrow$ não

Graf:



$y_1 = 2x+3$

$y_2 = 3x-5$

---

9. O coeficiente de x^{18} no desenvolvimento de $(x + 1)^{20}$ é:

(A) 380
(B) 190
(C) 95
(D) 20
(E) 1

$T_{p+1} = \binom{20}{p}(x)^{20-p}(1)^p$

$\binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$

---

10. O mínimo valor de $\dfrac{x^4 + x^2 + 5}{(x^2 + 1)^2}$, x real, é:

(A) 0,50
(B) 0,80
(C) 0,85
(D) 0,95
(E) 1

$(x^4+x^2+5)(x^2+1)^{-2} \rightarrow$

Ou equivale e calcule Δ.

$\rightarrow (x^2+1)^{-2}(4x^3+2x) + -2(x^2+1)^{-3}(x^4+x^2+5)2x = 0$

$\frac{(4x^3+2x)(x^2+1)}{(x^2+1)^3} - \frac{4x(x^4+x^2+5)}{(x^2+1)^3} =$

$= \frac{\cancel{4x^5}+\cancel{4x^3}+2x^3+2x-\cancel{4x^5}-\cancel{4x^3}-20x}{(x^2+1)^3} = 0$

$\frac{2x^3-18x}{(x^2+1)^3} = 0$

$\rightarrow x = 0$

$2x^2 = 18$

$x^2 = 9$

$\rightarrow x = \pm 3$

$x = 3$

---

11. Calcule $\lim_{x \to 0^+} x\, e^{1/x}$.

(A) 0
(B) 1
(C) $\sqrt{e}$
(D) e
(E) ∞

$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \frac{e^{1/x}\cdot(1/x)'}{(1/x)'} = e^{1/x} \Rightarrow \infty$

---

12. Se $f(x) = \ln \operatorname{sen}^2 x$ determine $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

(A) $-\ln 2$

(B) 1

(C) $\frac{\pi}{4}$

(D) 2

(E) $2\sqrt{2}$

$f'(x) = \frac{2\cancel{\operatorname{sen} x}\cos x}{\cancel{\operatorname{sen} x}\cdot\operatorname{sen} x} = 2\operatorname{ctg} x$

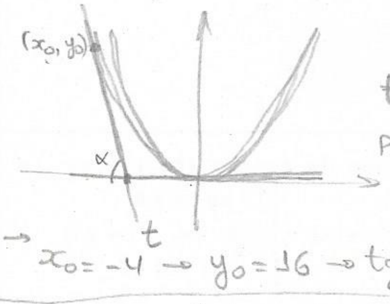
$f'(\frac{\pi}{4}) = 2$

---

13. As tangentes à curva de equação $y = x^2$ que passam pelo ponto $P(-2,0)$ formam ângulo α. Determine $\operatorname{tg}\alpha$.

(A) 1
(B) 2
(C) 4
(D) 6
(E) 8

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{16}{2} = 8$



$y = x^2 \quad y' = 2x$

t: $y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0)$

P∈t: $-x_0^2 = 2x_0(-2-x_0)$

$\rightarrow x_0 = 2(2+x_0)$

$\rightarrow x_0 = -4 \rightarrow y_0 = 16 \rightarrow \operatorname{tg}\alpha = |y'| = 8$

---

14. Determine a excentricidade da elipse de equação $4x^2 + 9y^2 = 2$.

(A) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

(B) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

(C) $\frac{\sqrt{5}}{6}$

(D) $\frac{\sqrt{5}}{9}$

(E) $\frac{\sqrt{5}}{18}$

$\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{\frac{2}{9}} = 1$

$a^2 = \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$b^2 = \frac{2}{9} \rightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{9}$

$c^2 = \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{9-4}{18} = \frac{5}{18} = \frac{10}{36}$

$c = \frac{\sqrt{10}}{6}$

$e = \frac{\frac{\sqrt{10}}{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{6} : \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{20}}{6} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$x^4+x^2+5 = K(x^4+2x^2+1)$

15. A equação da bissetriz do ângulo agudo formado pelas retas $3x + 4y + 1 = 0$ e $5x - 12y + 3 = 0$ é:

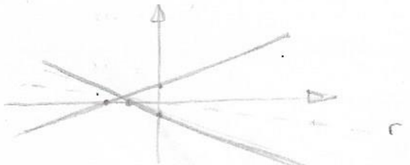
(A) $2x - 2y + 1 = 0$

(B) $x - 8y + 1 = 0$

(C) $x + 6y = 0$

(D) $7x + 56y - 1 = 0$

(E) $16x - 2y + 7 = 0$



$\beta: \frac{|3x+4y+1|}{5} = \frac{|5x-12y+3|}{13}$

$\rightarrow |39x+52y+13| = |25x-60y+15|$

$\rightarrow 39x+52y+13 = 25x-60y+15 \rightarrow 14x+112y-2=0$. $7x+56y-1=0$ ①

$\rightarrow 39x+52y+13 = -25x+60y-15 \rightarrow 64x-8y+28=0$, $16x-2y+7=0$ ②

$m_{①} = \frac{-7}{56} = -\frac{1}{8}$ $m_{②} = \frac{-16}{-2} = 8$

---

16. O vetor projeção de $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ sobre $\vec{v} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ é:

(A) $2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

(B) $\frac{2\vec{i}}{3} - \frac{2\vec{j}}{3} + \frac{1\vec{k}}{3}$

(C) $-2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

(D) $-\frac{2\vec{i}}{3} + \frac{2\vec{j}}{3} - \frac{1\vec{k}}{3}$

(E) $-6\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$

$\vec{u}_{\vec v} = |\vec u|\cos\theta \cdot \vec{u}_{\vec v} = |\vec u|\cos\theta \cdot \frac{\vec v}{|\vec v|} = |\vec u| \cdot \frac{\vec u \cdot \vec v}{|\vec u||\vec v|} \cdot \frac{\vec v}{|\vec v|}$

$\vec u \cdot \vec v = |\vec u| \cdot |\vec v| \cdot \cos\theta$

$\rightarrow \frac{(4-6-1)}{9}\left[2\vec i - 2\vec j + \vec k\right] = -\frac{2}{3}\vec i + \frac{2}{3}\vec j - \frac{1}{3}\vec k$

---

17. $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores unitários tais que $|\vec{u} + 2\vec{v}| = |\vec{u} - \vec{v}|$. O ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ mede:

(A) 30°

(B) 45°

(C) 60°

(D) 90°

(E) 120°

$|\vec u| = 1$ $|\vec v| = 1$

$\vec v \vec v = |\vec v||\vec v|\cos\theta = |\vec v|^2 = 1$

$\vec u \vec v = |\vec u||\vec v| \cos\alpha = \cos\alpha$

$|\vec u + 2\vec v|^2 = |\vec u - \vec v|^2 \Rightarrow (\vec u + 2\vec v)(\vec u + 2\vec v) = (\vec u - \vec v)(\vec u - \vec v) \rightarrow$

$\rightarrow \cancel{\vec u \vec u} + 2\vec u\vec v + 2\vec v\vec u + 4\vec v\vec v = \cancel{\vec u\vec u} - \vec u\vec v - \vec v\vec u + \vec v\vec v$

$3\vec v\vec v = -6\vec v\vec u$

$\underbrace{\vec v\vec v}_{1} = -2\vec u\vec v \rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 120^\circ$

---

18. Sejam A, B e C conjuntos. A condição necessária e suficiente para que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ é:

(A) $A = B = C$

(B) $A \cap C = \emptyset$

(C) $A - C = \emptyset$

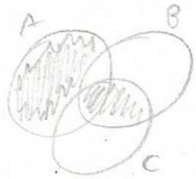
(D) $A = \emptyset$

(E) $A \cup C = B$

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = (A \cup B) \cap C$

$C = A \cup C$

$A - C = \emptyset$



---

19. Se $f(x) = \frac{1}{1 + e^x}$, determine $f^{-1}(x)$.

(A) $\ln(x - 1)$

(B) $\ln\frac{1}{x}$

(C) $\ln\frac{1 - x}{x}$

(D) $\ln\frac{x}{1 - x}$

(E) $1 + e^x$

$y = \frac{1}{1+e^x} \rightarrow x = \frac{1}{1+e^y} \rightarrow x + xe^y = 1$

$xe^y = 1 - x$

$e^y = \frac{1-x}{x}$

$y = \ln\frac{1-x}{x}$

---

20. Determine o conjunto-imagem da função (fog) para

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 2x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{se } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ x/2 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

(A) $[0, 1] \cup \{2\}$

(B) $(-\infty, +\infty)$

(C) $[0, 1]$

(D) $[0, +\infty)$

(E) $\{1\}$

$f(g(x)) = k$

$f(1)$ para $x < 0 \rightarrow 2$

$f(\frac{x}{2})$ para $0 \leq x \leq 1 \rightarrow x \rightarrow [0,1]$

$f(1)$ para $x > 1 \rightarrow 2$

---

21. Quando as diagonais de um paralelogramo são também bissetrizes dos seus ângulos internos?

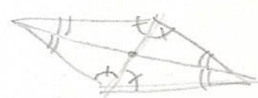
(A) Só se dois ângulos internos e consecutivos forem complementares.

(B) Só se o paralelogramo for um quadrado.

(C) Só se o paralelogramo for um retângulo.

(D) Só se o paralelogramo for um losango.

(E) Só se a soma dos ângulos internos for 360°.



$4\alpha + 4\beta = 360$

$\alpha + \beta = 90$

Diagonais perpendiculares.

$\rightarrow$ É paralelogramo e losango.

22. Um triângulo equilátero está circunscrito a um círculo de raio r. O raio do círculo que é tangente ao círculo de raio r e a dois lados do triângulo é:

(A) $\frac{r}{4}$

(B) $\frac{r}{3}$

(C) $\frac{r}{2}$

(D) $\frac{2r}{5}$

(E) $\frac{r\sqrt{3}}{3}$

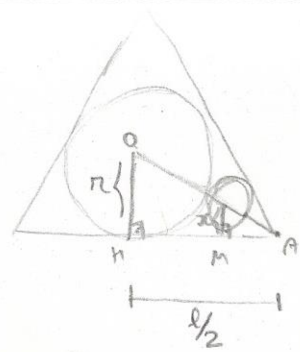
Ou: $r+r+x+x+x = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

$2r+3x = \frac{r\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}}{2} = 3r$

$3x = r$

$x = r/3$

Ou: NOTANDO o $\alpha = 30°$



$\frac{2}{3}\cdot\frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{3}$

$r^2 = \frac{l^2}{3} - \frac{l^2}{4} = \frac{l^2}{12} \to r = \frac{l}{\sqrt{12}}$

$l = r\sqrt{12}$

$\frac{r}{\frac{l\sqrt{3}}{3}} = \frac{x}{\frac{l\sqrt{3}}{3} - r - x}$

$\frac{r}{\frac{r\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}}{3}} = \frac{x}{\frac{r\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}}{3} - r - x}$

$\to \frac{r}{2r} = \frac{x}{r-x} \to r-x = 2x \to x = r/3$

23. O volume gerado pela revolução de um hexágono regular de lado $\underline{a}$ em torno de um de seus lados é igual a:

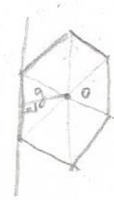
(A) $\frac{9\pi}{2}a^3$

(B) $\frac{7\pi}{2}a^3$

(C) $\frac{5\pi}{2}a^3$

(D) $\frac{3\pi}{2}a^3$

(E) $3\pi a^3$



$V = 2\pi g\cdot S =$

$= 2\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{6a^2\sqrt{3}}{4} =$

$= \frac{9a^3\pi}{2}$

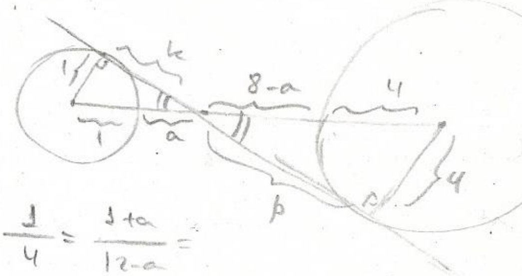
24. Se α é um plano e P é um ponto não pertencente a α, quantos planos e quantas retas, respectivamente, contêm P e são perpendiculares a α?

(A) 1 e 1
(B) infinitos e zero
(C) infinitos e 1
(D) zero e 1
(E) infinitos e infinitas

retas → 1
planos → ∞

25. Os centros de dois círculos de raios 1 e 4 distam 13 entre si. O segmento da tangente comum interna compreendido entre os pontos de tangência mede:

(A) 12
(B) 11
(C) 10
(D) 9
(E) 8



$\frac{1}{4} = \frac{1+a}{12-a} =$

$12-a = 4+4a$

$8 = 5a$

$a = 8/5$

$1+a = \frac{5}{5}+\frac{8}{5} = \frac{13}{5}$

$12-a = \frac{60}{5}-\frac{8}{5} = \frac{52}{5}$

$k = \sqrt{\frac{169}{25}-\frac{25}{25}} = \frac{12}{5}$

$p = \sqrt{\frac{2704}{25}-\frac{16\cdot 25}{25}} = \frac{48}{5}$

25 × 16 = 150 + 25 = 400

52 × 52 = 104 + 260 = 2704

2704 − 400 = 2304