MINISTÉRIO DA MARINHA
ESCOLA NAVAL
SUPERINTENDÊNCIA DE ENSINO

CONCURSO DE ADMISSÃO - 1990/1991

PROVA DE MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES

1 - Este Caderno de Prova é composto de 25 questões, todas de igual valor.

2 - Além deste Caderno de Prova, cada candidato receberá um CARTÃO DE RESPOSTAS com tarja vermelha, para ser processado em computador.

3 - É proibido ter em seu poder livros, cadernos, papéis, bolsas, calculadoras eletrônicas, relógio com calculadora e régua de cálculo, durante a realização da prova.

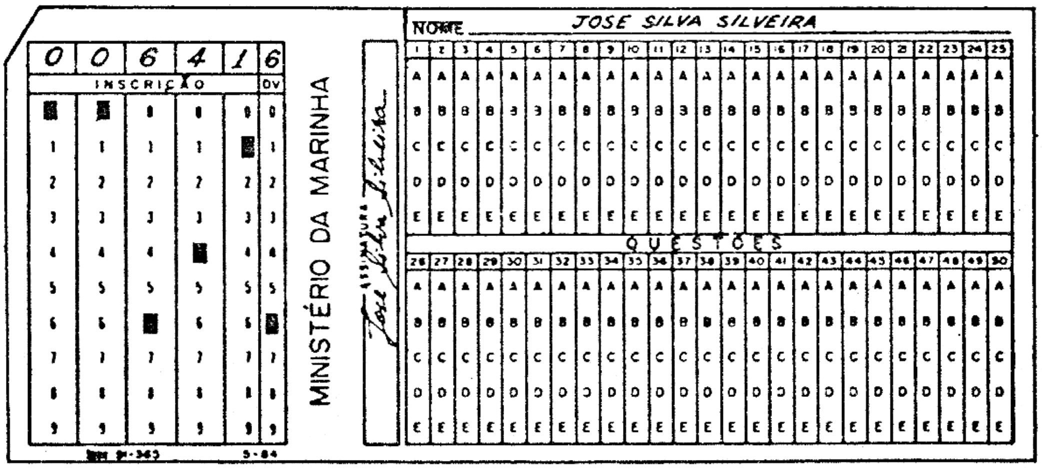
4 - Só comece a responder às questões ao ser dada ordem para iniciar a prova.

5 - O tempo disponível para a resolução das questões e perfuração do CARTÃO DE RESPOSTAS é de 3 horas. Após decorridos 30 minutos do início da prova, o candidato que terminar poderá retirar-se.

6 - O candidato deverá ter o máximo cuidado para não cometer erros na perfuração do CARTÃO DE RESPOSTAS. Mais de uma resposta perfurada num mesmo item o tornará invalidado.

7 - Recomenda-se ao candidato que NÃO DOBRE ou DANIFIQUE O CARTÃO DE RESPOSTAS para que não seja rejeitado por ocasião da correção no computador.

8 - Escreva seu nome (legível), assine, coloque o número de inscrição e perfure-o no CARTÃO DE RESPOSTAS, conforme o modelo abaixo.



1. Se $\text{sen}\, x + \cos x = \frac{1}{2}$ então sen 2x é igual a:

(A) $\frac{-1-\sqrt{7}}{4}$ $\quad (\text{sen}\,x + \cos x)^2 = \frac{1}{4}$

(B) $\frac{1-\sqrt{7}}{2}$ $\quad \text{sen}^2 x + 2\,\text{sen}\,x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{4}$

(C) $\frac{-1+\sqrt{7}}{2}$ $\quad \text{sen}\,2x = \frac{1}{4} - 1$

(D) $\frac{1+\sqrt{7}}{4}$ $\quad \text{sen}\,2x = -\frac{3}{4}$

~~(E)~~ $-\frac{3}{4}$

---

2. A equação $\sec^3 x - 2\,tg^2 x = 2$, no intervalo $[0, 2\pi]$:

(A) não possui solução.
(B) possui uma solução.
~~(C)~~ possui duas soluções.
(D) possui três soluções.
(E) possui quatro soluções.

$\sec^3 x = 2 + 2tg^2 x$
$= 2(1 + tg^2 x) = 2\sec^2 x$
$\frac{1}{\cos x} = 2 \quad \cos x = \frac{1}{2} \quad S\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

---

3. Os triângulos ABC e ABD são equiláteros e estão situados em planos perpendiculares. O cos $\widehat{CAD}$ é igual a:

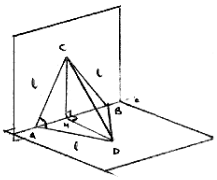
(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{6}$

(D) $\frac{1}{8}$

(E) $\frac{1}{\sqrt{6}}$



$CM = DM = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

$CD = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{l\sqrt{6}}{2}$

$\left(\frac{l\sqrt{6}}{2}\right)^2 = l^2 + l^2 - 2ll\cos\theta$

$2\cos\theta = 2 - \frac{6}{4} = \frac{1}{2}$

$\cos\theta = \frac{1}{4}$

---

4. Escrevem-se os inteiros positivos em ordem crescente 12345678910111213..... O 1991º algarismo escrito é:

~~(A)~~ 0
(B) 1
(C) 3
(D) 4
(E) 5

Nºs de 1 algarismo: 9
usam-se 9 algs → restam 1982
Nºs de 2 algarismos: 90
usam-se 180 algs → restam 1802
Nºs de 3 algarismos: 900
usam-se 2700 algs :
$1802 = 3 \times 600 + 2 \rightarrow n_1 = 100 + 600 = 700$

---

5. O valor de m para o qual 1 é raiz dupla do polinômio $P(x) = x^{10} - mx^5 + m - 1$ é:

(A) 1 $\quad P(1) = 1 - m + m - 1 = 0 \quad (\forall m, m \in \mathbb{R})$
~~(B)~~ 2 $\quad P'(x) = 10x^9 - 5$
(C) 3
(D) 4 $\quad P'(1) = 10 - 5m = 0 \quad m = 2$
(E) 5

---

6. O lugar geométrico das imagens do complexo z^2 quando o complexo $z = x + yi$ (x e y reais) descreve a reta $x = 2$ é:

(A) a reta $x = 4$.
(B) um círculo.
(C) uma elipse.
(D) uma hipérbole.
~~(E)~~ uma parábola.

$z = x + yi$
$x = 2$
$z = 2 + yi$
$z^2 = 4 + 4yi + y^2 i^2$
$= 4 - y^2 + 4yi = \alpha + \beta i$

$\alpha = 4 - y^2$
$\beta = 4y \rightarrow y = \frac{\beta}{4}$
$\alpha = 4 - \frac{\beta^2}{16}$
$\beta^2 = -16(\alpha - 4)$

$z^2 \in P: y^2 = -16(x-4)$

---

7. Lançam-se simultaneamente cinco dados honestos. Qual a probabilidade de serem obtidos nesta jogada, uma trinca e um par (isto é, um resultado do tipo AAABB com $B \neq A$)?

(A) $\frac{5}{1296}$

(B) $\frac{5}{3888}$

~~(C)~~ $\frac{25}{648}$

(D) $\frac{125}{324}$

(E) $\frac{125}{648}$

escolha da trinca : 6
" do par : 5
ordenação $P_5^{3,2} = C_5^2 = 10$

$p = \frac{\cancel{6} \times 5 \times 10}{6^{\cancel{5}\,4}} = \frac{25}{648}$

8. Representemos por min(a,b) o menor dos números a e b, isto é,

$$\min(a,b) = \begin{cases} a, & \text{se } a \leqslant b \\ b, & \text{se } a > b \end{cases}$$

A solução da inequação $\min(2x+3,\ 3x-5) < 4$ é:

(A) $x < \frac{1}{2}$

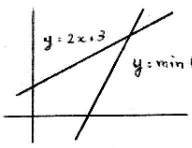
(B) $x < 3$

(C) $\frac{1}{2} < x < 3$

(D) $x > \frac{1}{2}$

(E) $x > 3$

1ª solução



$y = 2x+3 \rightarrow$

$\rightarrow 2x+3 \leqslant 3x-5 \rightarrow x \geqslant 8$

$\rightarrow 2x+3 < 4 \rightarrow x < \frac{1}{2}$

$\rightarrow S_1 = \emptyset$

$y = 3x-5 \rightarrow$

$\rightarrow 3x-5 < 2x+5$ (sic) $\rightarrow x < 8$

$3x-5 < 4 \rightarrow x < 3$

$S_2 = x < 3$

$S = S_1 \cup S_2 \rightarrow x < 3$

---

9. O coeficiente de x^{18} no desenvolvimento de $(x+1)^{20}$ é:

(A) 380
(B) 190
(C) 95
(D) 20
(E) 1

$\text{coef}_{x^{18}} = C_{20}^{2}\ 1^2 = 190$

---

10. O mínimo valor de $\dfrac{x^4+x^2+5}{(x^2+1)^2}$, x real, é:

(A) 0,50
(B) 0,80
(C) 0,85
(D) 0,95
(E) 1

$y' = \dfrac{(4x^3+2x)(x^2+1)^2 - (x^4+x^2+5)\ 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4}$

$y' = 2x\dfrac{[(2x^2+1)(x^2+1) - 2(x^4+x^2+5)]}{(x^2+1)^3}$

---

11. Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} x\, e^{1/x}$.

(A) 0
(B) 1
(C) $\sqrt{e}$
(D) e
(E) ∞

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{1/x}}{\frac{1}{x}}$ $\quad y = \frac{1}{x} \rightarrow \infty$

$= \lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{e^y}{y}$ $\quad \lim\limits_{y\to\infty} = e^y = \infty$

---

12. Se $f(x) = \ln \operatorname{sen}^2 x$ determine $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

(A) $-\ln 2$

(B) 1

(C) $\frac{\pi}{4}$

(D) 2

(E) $2\sqrt{2}$

$f(x) = 2 \ln \operatorname{sen} x$

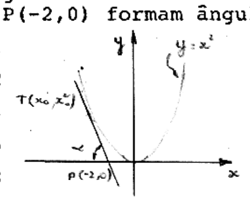
$f'(x) = 2\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ $\quad f'(x) = 2 \operatorname{ctg} x$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$

---

13. As tangentes à curva de equação $y = x^2$ que passam pelo ponto P(-2,0) formam ângulo α. Determine tg α.

(A) 1
(B) 2
(C) 4
(D) 6
(E) 8



$y = x^2 \rightarrow y' = 2x$

$t: y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0)$

$P \in t \rightarrow -x_0^2 = 2x_0(-2+x_0)$

$x_0' = 0 \qquad \rightarrow x_0'' = -4$

$x_0^2 = 4 + 2x''$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = |m_t| = |2\cdot(-4)| = 8$

---

14. Determine a excentricidade da elipse de equação $4x^2 + 9y^2 = 2$.

(A) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

(B) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

(C) $\frac{\sqrt{5}}{6}$

(D) $\frac{\sqrt{5}}{9}$

(E) $\frac{\sqrt{5}}{18}$

$e: \dfrac{x^2}{\frac{1}{2}} + \dfrac{y^2}{\frac{2}{9}} = 1$

$a^2 = \frac{1}{2}$, $b^2 = \frac{2}{9}$ $\rightarrow c^2 = \frac{5}{18}$

$e^2 = \dfrac{c^2}{a^2}$ $\quad e^2 = \frac{5}{9}$ $\quad e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

2ª solução

$\min(a,b) = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}$

$\rightarrow \dfrac{2x+3+3x-5-|2x+3-3x+5|}{2}$ $\rightarrow 5x-2-|-x+8| < 8$

$x \geqslant 8$

$\rightarrow 5x-2-(x-8) < 8$

$4x+6 < 8 \rightarrow x < \frac{1}{2}$

$\rightarrow$ Impossível

$x < 8$

$\rightarrow 5x-2-(x-8) < 8$

$\rightarrow 6x-10 < 8 \rightarrow x \leqslant 3$

$= \dfrac{2x[2x^4+3x^2+1-2x^4-2x^2-10]}{(x^2+1)^3} \rightarrow y' = \dfrac{2x(x^2-9)}{(x^2+1)^3}$

$y': \begin{cases} x = -3 \rightarrow \text{mínimo} \\ x = 0 \rightarrow \text{máximo} \\ x = 3 \rightarrow \text{mínimo} \end{cases}$ $\quad y_{min} \rightarrow x = \pm 3 \rightarrow x^2 = 9$

$y_{min} = \dfrac{81+9+5}{(9+1)^2} = \dfrac{95}{100} = 0{,}95$

2ª solução

$y(x^4+2x^2+1) = x^4+x^2+5$

$(y-1)x^4 + (2y-1)x^2$

$\Delta \geqslant 0 \rightarrow (2y-1)^2 - 4(y-1)(y-5) \geqslant 0$

$\rightarrow \cancel{4y^2} - 4y + 1 - \cancel{4y^2} + 24y - 20 \geqslant 0$

$20y - 19 \geqslant 0 \rightarrow y \geqslant \frac{19}{20}$ $\quad y \geqslant 0{,}95$

15. A equação da bissetriz do ângulo agudo formado pelas retas $3x + 4y + 1 = 0$ e $5x - 12y + 3 = 0$ é:

(A) $2x - 2y + 1 = 0$

(B) $x - 8y + 1 = 0$

(C) $x + 6y = 0$

(D) $7x + 56y - 1 = 0$

~~(E)~~ $16x - 2y + 7 = 0$

$\beta : \frac{|3x+4y+1|}{5} = \frac{|5x-12y+3|}{13}$

$|39x+52y+13| = |25x-60y+15|$

$39x+52y+13 = 25x-60y+15$

$14x+112y-2 \rightarrow \beta_1 : 7x+56y-1=0$

$39x+52y+13 = -25x+60y-15$

$\rightarrow 64x - 8y + 28 = 0 \rightarrow \beta_2 : 16x - 2y + 7 = 0 \rightarrow m = 8$

$tg\,\theta_2 = \left|\frac{8+3/4}{1+8\left(-\frac{3}{4}\right)}\right| = \frac{35/4}{5} = \frac{7}{4} > 1$

---

16. O vetor projeção de $\vec u = 2\vec i + 3\vec j - \vec k$ sobre $\vec v = 2\vec i - 2\vec j + \vec k$ é:

(A) $2\vec i - 2\vec j + \vec k$

(B) $\frac{2\vec i}{3} - \frac{2\vec j}{3} + \frac{1\vec k}{3}$

(C) $-2\vec i + 2\vec j - \vec k$

~~(D)~~ $-\frac{2\vec i}{3} + \frac{2\vec j}{3} - \frac{1\vec k}{3}$

(E) $-6\vec i + 6\vec j - 3\vec k$

$u_{\vec v} = |\vec u|\cos\theta = \frac{\vec u\cdot\vec v}{|\vec v|}$; $\vec u_{\vec v} = u_{\vec v}\,\vec\mu_{\vec v}$

$\frac{\vec u\cdot\vec v}{|\vec v|}\,\frac{\vec v}{|\vec v|} = \frac{\vec u\cdot\vec v}{|v|^2}\cdot\vec v$

$\vec u_{\vec v} = \frac{4-6-1}{4+4+1}(2\vec i + 2\vec j + \vec k)$

$= -\frac{2}{3}\vec i + \frac{2}{3}\vec j - \frac{1}{3}\vec k$

---

17. $\vec u$ e $\vec v$ são vetores unitários tais que $|\vec u + 2\vec v| = |\vec u - \vec v|$. O ângulo entre $\vec u$ e $\vec v$ mede:

(A) 30^o

(B) 45^o

(C) 60^o

(D) 90^o

~~(E)~~ 120^o

$(\vec u+2\vec v)(\vec u+2\vec v) = (\vec u-\vec v)(\vec u-\vec v)$

$\vec u\cdot\vec u + 4\vec u\vec v + 4\vec u\vec v = \vec u\vec u - 2\vec u\vec v + \vec v\vec v$

$\rightarrow 6\vec u\vec v = -3$

$\underbrace{|\vec u|}_{1}\underbrace{|\vec v|}_{1}\cos\theta = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ $\theta = 120°$

---

18. Sejam A, B e C conjuntos. A condição necessária e suficiente para que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ é:

(A) $A = B = C$

(B) $A \cap C = \emptyset$

~~(C)~~ $A - C = \emptyset$

(D) $A = \emptyset$

(E) $A \cup C = B$

$-(A\cup B)\cap(A\cup C) = (A\cup B)\cap C$

$A\cup C = C \rightarrow A \subset C$ $A - C \neq \emptyset$

$\rightarrow A\cup(B\cap C) = (A\cap C)\cup(B\cap C)$

---

19. Se $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$, determine $f^{-1}(x)$.

(A) $\ln(x-1)$

(B) $\ln\frac{1}{x}$

~~(C)~~ $\ln\frac{1-x}{x}$

(D) $\ln\frac{x}{1-x}$

(E) $1 + e^x$

$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

$1+e^x = \frac{1}{y}$ $e^x = \frac{1}{y} - 1 = \frac{1-y}{y}$

$x = \ln\frac{1-y}{y} = f^{-1}(y)$

---

20. Determine o conjunto-imagem da função (fog) para

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 2x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{se } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ x/2 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

~~(A)~~ $[0, 1] \cup \{2\}$

(B) $(-\infty, +\infty)$

(C) $[0, 1)$

(D) $[0, +\infty)$

(E) $\{1\}$

$x < 0 \rightarrow g(x) = 1$

$fog(x) = f(1) = 2$

$0 \leq x \leq 1 - g(x) = \frac{x}{2} = y$

$0 \leq y \leq \frac{1}{2} - fog(x) = f(1) = 2$

$Im\, fog = [0,1] \cup \{2\}$

---

21. Quando as diagonais de um paralelogramo são também bissetrizes dos seus ângulos internos?

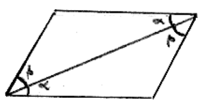
(A) Só se dois ângulos internos e consecutivos forem complementares.

(B) Só se o paralelogramo for um quadrado.

(C) Só se o paralelogramo for um retângulo.

~~(D)~~ Só se o paralelogramo for um losango.

(E) Só se a soma dos ângulos internos for 360^o.



$\alpha = \beta$ → ΔABC é isósceles

AB = BC

ABCD é losango

22. Um triângulo equilátero está circunscrito a um círculo de raio r. O raio do círculo que é tangente ao círculo de raio r e a dois lados do triângulo é:

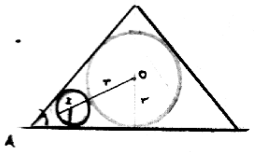
(A) $\frac{r}{4}$

(B) $\frac{r}{3}$

(C) $\frac{r}{2}$

(D) $\frac{2r}{5}$

(E) $\frac{r\sqrt{3}}{3}$



$AI = 2r'$

$AO = 2r$

$2r = 2r' + r' + r$

$3r' = r \quad r' = \frac{r}{3}$

---

23. O volume gerado pela revolução de um hexágono regular de lado a em torno de um de seus lados é igual a:

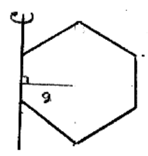
(A) $\frac{9\pi}{2} a^3$

(B) $\frac{7\pi}{2} a^3$

(C) $\frac{5\pi}{2} a^3$

(D) $\frac{3\pi}{2} a^3$

(E) $3\pi a^3$



$V = 2\pi S g$

$2\pi \; 6\frac{a^3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\frac{9\pi}{2} \cdot a^3$

---

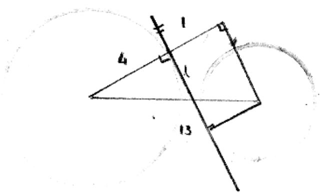
24. Se α é um plano e P é um ponto não pertencente a α, quantos planos e quantas retas, respectivamente, contêm P e são perpendiculares a α?

(A) 1 e 1
(B) infinitos e zero
(C) infinitos e 1
(D) zero e 1
(E) infinitos e infinitas

---

25. Os centros de dois círculos de raios 1 e 4 distam 13 entre si. O segmento da tangente comum interna compreendido entre os pontos de tangência mede:

(A) 12
(B) 11
(C) 10
(D) 9
(E) 8



$l = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$