Escola Naval 1988
Matemática

1. Assinale a alternativa verdadeira:

(A) $-1^2 = 1$ e $0,999\ldots < 1$
(B) $-1^2 = -1$ e $0,999\ldots < 1$
(C) $-1^2 = 1$ e $0,999\ldots = 1$
(D) $-1^2 = -1$ e $0,999\ldots = 1$
(E) $0,999\ldots > 1$

2. Para todo x real, $-3 < \dfrac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$ se e só se:

(A) $-3 < a < 2$
(B) $-1 < a < 2$
(C) $-6 < a < 7$
(D) $-1 < a < 7$
(E) $-6 < a < 2$

3. O conjunto-solução da inequação

$$\frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2 x - 1} < 1 \text{ é:}$$

(A) $\mathbb{R}$
(B) $(0,\infty)$
(C) $(0,2) \cup (2,\infty)$
(D) $(1,2)$
(E) $(0,1) \cup (2,\infty)$

4. Uma pessoa percorre 44 km, uma parte correndo (com velocidade 10 km/h) e outra parte andando (com velocidade 5 km/h). Durante quanto tempo ela correu? Sabe-se que se ela tivesse caminhado durante o tempo que correu e corrido durante o tempo que caminhou, ela teria percorrido 46 km.

(A) 2h
(B) 2h 12 min
(C) 2 h 24 min
(D) 2 h 36 min
(E) 2 h 48 min

5. Se 70% da população gostam de samba, 75% de choro, 80% de bolero e 85% de rock, quantos por cento da população, no mínimo, gostam de samba, choro, bolero e rock?

(A) 5% (B) 10%

(C) 20% (D) 45%

(E) 70%

145 → 45
45 + 80 = 125 → 25
25 + 85 = 110
10

6. Se $f(x) = \log_3(2x - 1)$ então $f^{-1}(x) =$

(A) $\dfrac{1}{\log_3(2x-1)}$ (B) $\dfrac{3^x + 1}{2}$

(C) $\dfrac{3^x - 1}{2}$ (D) $\log_3 \dfrac{2 - x}{x}$

(E) $\dfrac{2}{3^x + 1}$

$y = \log_3(2x-1)$
$x = \log_3(2y-1)$
$2y - 1 = 3^x$
$y = \dfrac{3^x+1}{2}$

7. Seja $x \notin \{-1,0,1\}$. Se $f_1(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$ e $f_{n+1}(x) = f_1|f_n(x)|$ para todo n natural, então $f_{1988}(x)$ igual a:

(A) $\dfrac{x-3}{x+1}$ (B) x

(C) $\dfrac{x+3}{1-x}$ (D) $\dfrac{3-x}{x+1}$

(E) $\dfrac{x+3}{x-1}$

8. O valor de $\text{tg } 20^\circ \cdot \text{tg } 40^\circ \cdot \text{tg } 80^\circ$ é:

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$

(C) $\sqrt{3}$ (D) 2

(E) $2\sqrt{3}$

9. O número de soluções da equação $\text{sen}^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2}\,\text{sen } 2x$ no intervalo $(0, 2\pi)$ é:

(A) 0 (B) 1

(C) 2 (D) 3

(E) 4

Fatora $a+b$

10. Numa pirâmide triangular V - ABC, a base ABC é um triângulo equilátero e as arestas VA, VB, VC formam um triedro tri-retângulo. A tangente do ângulo diedro formado por uma face lateral com a base é igual a:

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(C) 1 (D) $\sqrt{2}$

(E) $\sqrt{3}$

11. O ponto B pertence ao segmento $\overline{AC}$, dista 2 cm do ponto A e dista 1 cm do ponto C. O raio dum círculo que tangencia exteriormente os círculos de diâmetros $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ e tangencia internamente o círculo de diâmetro $\overline{AC}$ é:

$x = 70 + 75 - 100 = 45$

(A) $\frac{1}{3}$ cm (B) $\frac{2}{5}$ cm

(C) $\frac{3}{7}$ cm (D) $\frac{4}{9}$ cm

(E) $\frac{5}{11}$ cm

Figura → Teor. Stewart

12. São dados um círculo e um ponto P exterior ao círculo. Por P traçam-se duas secantes ao círculo, as quais cortam o círculo nos pontos A e B (A entre P e B) e C e D (C entre P e D). O ponto Q do círculo é tal que os arcos $\widehat{BQ}$ e $\widehat{QD}$ têm o mesmo sentido e medem 42° e 38°, respectivamente. A soma dos ângulos $\widehat{APC}$ e $\widehat{AQC}$ é:

(A) 80° (B) 62°

(C) 46° (D) 40°

(E) NRA

$\alpha + \beta = 360 - 159 - 161 = 40$

13. Que fração da área da terra pode ser vista por um observador situado a 20 km do solo? Suponha a terra esférica com raio 6 300 km.

(A) $\dfrac{1}{315}$ (B) $\dfrac{1}{628}$

(C) $\dfrac{1}{632}$ (D) $\dfrac{1}{6\ 280}$

(E) $\dfrac{1}{6\ 320}$

$\dfrac{S_{calota}}{S_{esfera}} = \dfrac{h}{2R}$

14. O raio do círculo inscrito no losango cujas diagonais medem 3 cm e 4 cm é:

(A) 0,6 cm (B) 1 cm

(C) 1,2 cm (D) 1,5 cm

(E) 2,4 cm

$\frac{5}{2}x = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{2}$; $x = \frac{12}{10} = 1,2$

15. Um poliedro convexo é formado por 10 faces triangulares e 10 faces pentagonais. O número de diagonais desse poliedro é:

(A) 60 (B) 81

(C) 100 (D) 121

(E) 141

$F = 20$
$A = \dfrac{10\cdot 3 + 10\cdot 5}{2} = 40$
$V = 22$
$D = \dfrac{V(V-1)}{2} - \sum d_f - A$
231 − 50 − 40

16. No intervalo $[-1, 2]$, o menor valor e o maior valor da função $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ são, respectivamente:

$f' = 4x^3 - 6x = x(4x^2 - 6)$

(A) $-1,25$ e 5 (B) $-1,25$ e 1

(C) -1 e 1 (D) -1 e 5

(E) 1 e 5

$f''(x) = 12x^2 - 6$
0 é máx. → 1
$\frac{\pm\sqrt{6}}{2}$ mín → $-1,25$

17. $\lim\limits_{x \to \infty} \left|\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 + 1}\right| =$

$\dfrac{x^2 + 4x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2+4x} + \sqrt{x^2+1}} = \approx \dfrac{4x}{2x} = 2$

(A) 0 (B) 2

(C) 3 (D) 4

(E) ∞

18. $\sqrt{i} =$ $\sqrt{cis\frac{\pi}{2}} \to cis\frac{\pi}{4}$

(A) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ (B) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$

(C) $\pm(1 + i)$ (D) $\pm(1 - i)$

(E) $\pm i$

19. A solução da equação abaixo

$$2^{6x+3} \cdot 4^{3x+6} = 8^{4x+5} \cdot 16^{2x+1}$$

pertence ao intervalo:

$12x+15 = 12x+8x+19$ $-4 = 8x$ $x = -\frac{1}{2}$

(A) $(-\infty, -1)$ (B) $(-1,0)$
(C) $(0,1)$ (D) $(1,2)$
(E) $(2,\infty)$

20. O resto da divisão do polinômio

$$P(x) = x^3 + 4x^2 - 5x$$

pelo polinômio $Q(x) = x^2 + x$ é:

(A) $-8x$ (B) -8
(C) $-8x - 8$ (D) $8x$
(E) 8

$x^3+4x^2-5x \,|\, x^2+x$ $-x^3-x^2$ $3x^2-5x$ $-3x^2-3x$ $-8x$ $x+3$

21. A distância entre os planos $x + 2y - 2z + 1 = 0$ e $2x + 4y - 4z + 5 = 0$ é:

$(-1,0,0)$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1
(C) 2 (D) 3
(E) 4

$d = \frac{|-2+5|}{\sqrt{4+16+16}} = \frac{3}{6}$

22. O circuncentro do triângulo de vértices A(2,6), B(4,8) e C(8,14) é o ponto:

(A) $(-15, 25)$ (B) $\left(\frac{14}{3}, \frac{28}{3}\right)$

(C) $(44, -22)$ (D) $(-10, 20)$

(E) $(5, 9)$

Mediatrizes de AB e BC (intersecção)

23. Os vetores $2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ e $a\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ são coplanares. Então $a =$

(A) 1 (B) $\frac{3}{2}$
(C) 2 (D) $\frac{5}{2}$
(E) 3

$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ a & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$24 - 6 + 4a + 4a - 18 - 8 = 0$ $8a = 8$ $a = 1$

24. O sistema de equações $\begin{cases} ax + 2y + z = 3 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + y + z = b \end{cases}$ é

indeterminado se e só se:

(A) $a = 1$ (B) $a = 1$ ou $a = 5$
(C) $a = 5$ e $b \neq \frac{11}{8}$ (D) $a \neq 1$ e $a \neq 5$
(E) $a = 5$ e $b = \frac{11}{8}$

25. A reta $y = mx + 3$ tangencia a elipse

$$x^2 + 4y^2 = 1$$

$2x + 8yy' = 0$ $y = mx +$ $3 = \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ $9 = m^2 + \frac{1}{4}$

se e só se:

(A) $m = \pm\frac{\sqrt{23}}{2}$ (B) $m = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}$

(C) $m = \pm\frac{\sqrt{31}}{2}$ (D) $m = \pm\frac{\sqrt{33}}{2}$

(E) $m = \pm\frac{\sqrt{35}}{2}$

$y' = \frac{-2x}{8y} = \frac{-x}{4y}$

Acha y e x e substitui